

運用多區間動態規劃於選題策略之研究

A Study of Applying Multi-division Dynamic Programming to Select Test Items

孫光天

蔡淑燕

程千芬

臺南師範學院資訊教育所 臺南師範學院資訊教育所 臺南師範學院資訊教育所
ktsun@ipx.ntntc.edu.tw tnnell95@mail.tn.edu.tw tnccf7@mail.tn.edu.tw

摘要

對於解組合最佳化問題上，動態規劃（dynamic programming）是一種尋求最佳解的有效技術，然而當目標函數為二次式時，動態規劃求解過程，誤差函數將可能出現二次彎曲函數曲線，無法有效找到最佳結果。本研究將以教育評量技術中，建構一份理想測驗，來符合預定施測目標為例，提出一套“多區間動態規劃法”做為選題策略，以有效解決誤差函數為二次函數時，會導致誤差值遞減後再遞增過大之問題，模擬結果顯示，本方法能十分有效地改善誤差值遞增過大的問題，肯定了本研究之多區間動態規劃技術可成功的運用於誤差函數為二次時之問題，擴展動態規劃之運用範圍，對日後動態規劃運用領域，提供更廣泛用途與更有效益的技術。

關鍵字：選題策略，動態規劃，多區間動態規劃

一、簡介

題目反應理論(Item Response Theory, 簡稱 IRT)為目前發展較成熟之評量理論，主要特點在於：題目參數估計與受試者彼此互相獨立、受試者能力估計與施測題目無關、及能力估計的精確度是可估計(已知)的[1]。由於題目反應理論其立論與假設均合理與嚴謹，深受測驗學者的青睞，因而廣泛應用於教育評量之相關研究中，其中，要如何選取最適當的題目，來建構一份理想測驗，以符合預定施測目標，為測驗編製中重要的一環。而國內目前實施的基本學力測驗，是從預先建立好的題庫，進行選題工作，以編製成一份測驗，由此顯示「選題策略」是一個值得研究的領域。

傳統的選題方式因過於簡單且缺乏彈性，以致選取試題與目標訊息函數間的誤差值仍偏高。故本研究擬設計出一高效率且低誤差的選題策略，使測驗題目反應出之測驗訊息(test information)更能符合測驗設計者的需求，此外，我們也與新近的一些學者的

研究，如：(1). 基因演算法 (Genetic Algorithm) [2]；(2). 貪婪演算法 (Greedy Approach) [3]；(3). 類神經網路選題策略 (Neural Network) [4]；(4). Swanson & Stocking 啟發法[5]；(5). Wang & Ackerman 啟發法[6]等五種方法進行比較，其結果各有優劣，將於效能評估中說明。

本文所提的多區間動態規劃改良自動態規劃，所謂的動態規劃 (Dynamic programming, DP)的特性就是把複雜的大問題切割成若干個具有前後關聯性的小問題，這種前後的關聯性用階段(stages)區隔，在每一個階段裏，只解決目前問題最佳可能結果，依著階段把所有的可能結果解完，原始的問題就跟著解決了。動態規劃主要的求解方法有順推法(forward approach)及逆推法(backward approach)，順推法是由後面最終的狀態，往前推算答案，而逆推法則與它相反，文中所使用的解題方法將為順推法。

本文第二章，將介紹動態規劃及運用於選題策略的原理；第三章則介紹運用多區間動態規劃架構；第四章則進行各種方法之效能評估；最後，則做一結論與建議。

二、運用動態規劃於選題策略

在題目反應理論中，每一題目對不同能力()受試者而言，均反應出不同訊息量，而此訊息量將可用來做選題時之參考，當訊息量越大，表示此題目對受試者能力估計越準確有效，而一測驗之訊息量，為測驗中每一題目訊息量累加求得。所以，要建構兩份難度相當之測驗，可以將測驗一之訊息量，定為測驗二之目標訊息量，當兩者訊息量誤差越小，兩份測驗難度就越相近，因此，問題之誤差函數就可定為目標訊息量與測驗訊息量的誤差平方和，如下式：

$$E_l = \sum_{j=1}^s (d_j - O_j)^2$$

$$O_j = \sum_{i=1}^n w_{ij} x_i, \quad x_i \in \{0,1\}$$

j : 能力點。 $j \in \{1,2,\dots,s\}$ (1)

w_{ij} : 試題*i*在能力點*j*訊息量。

d_j : 在能力點*j*欲達到的目標訊息量。

O_j : 在能力點*j*的測驗訊息量。

x_i : 以0,1,題目*i*表示"未選入"或"選入"測驗。

當多加入試題，誤差函數的改變情形如下：

$$\Delta E_{l,i} = E_{l,i} - E_l$$

where

$$E_{l,i} = \sum_{j=1}^s (d_j - O_{ji})^2 \quad (2)$$

$$O_{ji} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n w_{kj} x_k + w_{ij} x_i = O_j + w_{ij} x_i$$

將動態規劃運用於選題策略，主要是採用順推法求解01背包問題(0/1 knapsack problem)的解題模式，如下所示：

(一)目標函數及限制式

$$\min E_l = \min \sum_{j=1}^s (d_j - O_j)^2$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^n x_i = m \quad (3)$$

m : 測驗題數。

n : 題庫數。

$$m, n \in N \quad x_i \in \{0,1\}$$

(二)、動態規劃定義

1、最佳值函數

$$g_i(y): \text{剩餘須選} y \text{ 題時, 由題庫中}$$

$$\text{試題} i \text{ 到} n \text{ 選取時所獲得的}$$

$$\text{最小誤差平方和。} \quad (4)$$

2、遞迴關係

$$g_i(y) = \min \{ g_{i+1}(y), g_{i+1}(y-1) + \square E_{l,i} \} \quad (5)$$

$$, y \geq 1$$

3、邊界條件

$$g_{n+1}(0) = 0 \quad (6)$$

4、欲求的解答

$$g_1(m) = \sum_{j=1}^s (d_j - O_j)^2 \quad (7)$$

當目標函數以遞迴方式求解，可求得一合理解。

三、運用多區間動態規劃於選題策略

由於以傳統動態規劃直接解題，二次式的目標函數無法收斂到最佳解，往往產生更差答案，因此，我們將動態規劃加入「切割」

的概念，先將一個完整的動態規劃程序切割成多個區間(division)，每個區間視為一個子動態規劃(multi-subdynamic programming)，而每個子動態規劃間都有前後的關聯性；再將子動態規劃切成多階段(multi-stages)來解題。這種由多個子動態規劃串連而成動態規劃的方法，稱為多區間動態規劃，其選題策略主要包含兩個程序(phase)：程序一(phase 1)，以多區間動態規劃進行選題；接下來再進程序二(phase 2)，以Sun狀態替換法[7]進行替換程序(exchange phase)，使效能得到進一步提升。

多區間動態規劃運算的順序是由第1區間到最後區間，步驟分述如下，運作架構如圖1所示：

- 1、是以順推法求得區間的選題組合，依此組合計算區間測驗訊息量與區間目標訊息量的差值。
- 2、將此差值累加到下一個區間之區間目標訊息量。
- 3、更新下一個區間之區間目標訊息量。
- 4、重覆步驟1-3，直到最後一個區間為止。
- 5、計算最後區間之區間測驗訊息量與區間目標訊息量的誤差平方和。

本章將區問題庫數固定否列為控制變因，故實驗組合分成二種：(1)區問題庫數固定與(2)區問題庫數不固定。以題庫1000題，區間數10為例，區問題庫數固定指的是每個區間的題庫數固定為100題；而區問題庫數不固定指的是每個區間的初始題庫數為100題，該區間完成選題之後剩餘未考慮題目，累加到下一個區間的題庫裡，故區問題庫數不固定。

實驗一、區問題庫數固定

(一)、基本定義

區間數為

的初始平均目標訊息量：

$$\bar{d}_{j_div} = d_j / div$$

$$j: \text{能力點。} \quad j \in \{1,2,\dots,s\}$$

$$div: \text{區間數。} \quad div \in \{1,2,\dots,20\} \quad (8)$$

w_{ij} : 試題*i*在能力點*j*訊息量。

d_j : 在能力點*j*欲達到的目標訊息量。

區間的目標訊息量：

$$d_{j_f} = d_{j_f-1} - o_{j_f-1} + \bar{d}_{j_div} \quad (9)$$

$$d_{j_0} = 0, \quad o_{j_0} = 0$$

f : 表第幾區間, $f \in \{1,2,3,\dots,div\}$

區間的測驗訊息量：

$$o_{j-f} = \sum_{i=b_f}^{e_f} w_{ij} x_i, \quad x_i \in \{0,1\}$$

$$b_f = 1 + (n - (n/div) \times f)$$

$$e_f = n - (n/div) \times (f-1) \quad (10)$$

w_{ij} : 試題*i*在能力點*j*訊息量。
 n : 題庫數。
 b_f : 區間題庫起始試題題號。
 e_f : 區間題庫結束試題題號。

區間的誤差函數為：

$$E_{I-f} = \sum_{j=1}^s (d_{j-f} - o_{j-f})^2 \quad (11)$$

整份測驗的誤差函數為：

$$E_I = \sum_{j=1}^s (d_{j-div} - o_{j-div})^2 \quad (12)$$

d_{j-div} : 最後區間的目標訊息量。
 o_{j-div} : 最後區間的測驗訊息量。

當多加入試題，區間誤差函數的改變情形如下：

$$\Delta E_{I-f,i} = E_{I-f,i} - E_{I-f}$$

where

$$E_{I-f,i} = \sum_{j=1}^s (d_{j-f} - o_{j-fi})^2 \quad (13)$$

$$o_{j-fi} = \sum_{\substack{k=b_f \\ k \neq i}}^{n_f} w_{kj} x_k + w_{ij} \square = o_{j-f} + w_{ij}$$

n_f : 區間實際使用題庫之最後題號。

(二)、目標函數及限制式

$$\min E_I = \sum_{j=1}^s (d_{j-div} - o_{j-div})^2$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^n x_i = m \quad (14)$$

$m, n \in N \quad x_i \in \{0,1\}$

(三)、多區間動態規劃定義

1、最佳值函數

$g_i(y)$: 剩餘須選*y*題時,由題庫中試題到*n*選取時所獲得的最小誤差平方和。

2、階段數間遞迴關係

$$g_i(y) = \min \{g_{i+1}(y), g_{i+1}(y-1) + \square E_{I-f,i}\} \quad (15)$$

, $y \geq 1$

3、邊界條件

$$g_{e_f+1}(0) = 0 \quad (16)$$

4、區間的欲求解答(區間的誤差函數)

$$g_{b_f}(m/div) = \sum_{j=1}^s (d_{j-f} - o_{j-f})^2$$

(若 m/div 不能整除,則將餘數儘量均分到各區間)

5、最後區間的欲求解答(整份測驗的誤差函數)

$$g_1(m/div) = \sum_{j=1}^s (d_{j-div} - o_{j-div})^2$$

when

$$d_{j-div} = d_{j-(div-1)} - o_{j-(div-1)} + \bar{d}_{j-div}$$

(區間之間遞迴關係)

$$o_{j-div} = \sum_{i=b_f}^{e_f} w_{ij} x_i, \quad x_i \in \{0,1\}$$

實驗二、區問題庫數不固定

本實驗與實驗一除了區間測驗訊息量的題庫數定義不同外,其餘皆相同,故不在此贅述,僅就區問題庫數不固定這個變因介紹。區問題庫數分成二部份處理:第一部份是第1區問題庫數,為初始的平均題庫數;第二部份則是其餘的區問題庫數,由前區間完成選題之後剩餘未選題數,累加於區間平均題庫數,以下是區間測驗訊息量的題庫數定義介紹:

區間測驗訊息量：

$$o_{j-f} = \sum_{i=b_f}^{e_f} w_{ij} x_i, \quad x_i \in \{0,1\}$$

$$b_f = 1 + (n - (n/div) \times f)$$

$$e_f = (n - (n/div) \times (f-1)) + (n_{f-1} - b_{f-1}) \quad (19)$$

$n_0 = 0, b_0 = 0$

w_{ij} : 試題在能力點訊息量。
 n : 題庫數。
 n_f : 從區問題庫中實際考慮之最後題號。
 b_f : 區問題庫起始試題題號。
 e_f : 區問題庫結束試題題號。

Sun 狀態替換法

Sun 狀態替換法的特色是可以輕易地與多種測驗建構方法整合,做為測驗選題完成後的調校方法,該方法能快速有效地進一步收斂誤差值,改善率極佳。本章將多區間動態規劃與狀態替換法做一整合,並做以下二種實驗設計:

- 1、多區間動態規劃 + Sun 狀態替換法
- 2、random 選題法 + Sun 狀態替換法

藉由這二種實驗來觀察多區間動態規劃整合 Sun 狀態替換法之後，多區間動態規劃的個別效能及整合的整體效能。以下為 Sun 狀態替換法的步驟：

1、以題庫題目 q 替換測驗題目 p ，所得誤差的差值：

$$\Delta E_{I,pq}(t) = \sum_{j=1}^s (d_j - O_{j,pq}(t))^2 - \sum_{j=1}^s (d_j - O_j(t))^2, 1 \leq q \leq n$$

j : 能力點。 $j \in \{1, 2, \dots, s\}$
 d_j : 在能力點欲達到的目標訊息量。 (20)
 O_j : 在能力點的測驗訊息量。
 $O_{j,pq}$: 將題目由 p 換成 q 後，在能力點的測驗訊息量。
 t : 反覆替換程序的索引值，初始值設為0。
 n : 題庫數。

2、題庫剩餘題目一一與測驗題目 p 替換後，取誤差值較原誤差小者，再從中取最小值。

$$\Delta E_{I,pq}(t) = \min\{\Delta E_{I,pq}(t), \forall \Delta E_{I,pq}(t) < 0 \text{ and } x_q(t) \neq 1, q = 1 \sim n\}$$

$x_q(t) \neq 1$ 表未被選入測驗中。

3、假如找到誤差值較原誤差值小的題目，則進行替換題目。

$$x_p(t) = 0, \text{ and } x_q^*(t) = 1, \text{ when } \square E_{I,pq}(t) < 0 \quad (22)$$

$x_p(t) = 0$ 表將測驗題目 p 放回題庫。
 $x_q^*(t) = 1$ 表將題庫題目 q 選入測驗。

4、計算替換題目後新的測驗訊息量。

$$O_j(t+1) = \sum_{k=1}^n w_{ij} x_k - w_{pj} + w_{qj} = O_j(t) - w_{pj} + w_{qj}$$

w_{ij} : 題目 i 在能力點的訊息量。

5、將索引值 t 加1, 重覆步驟1-4, 直到 $t \geq m$ 才停止。

四、效能評估

本研究所使用之試題是以程式亂數產生 1000 題題庫，試題屬性呈均勻分布，以題目反應理論之三參數對數模式為基礎。能力值範圍為-3 到 3 的實數，數值越高表示能力越高，不同目標訊息量之測驗，分別使用於不同峰態(單峰分布、雙峰分布、一致性分布)、不同測驗題數(30 題、40 題、50 題)，試題屬性如表 1 所示。本研究共模擬 900 組不同目標訊息量之測驗，分別使用於不同峰態(單峰分布、雙峰分布、一致性分布)、不同測驗題數(30 題、40 題、50 題)，每種型態各 100 組，最後數據為每種測試所得的時間及誤差

值 100 組計算的平均值。

表 1 模擬題庫試題屬性

名稱 屬性	三參數		
	鑑別度 a	難度 b	猜測度 c
範圍	0.8~3.0	-3.0~+3.0	0.1~0.3
類型	實數	實數	實數
平均	1.916	-0.013	0.201
標準差	0.627	1.740	0.059

(一)、動態規劃效能評估

動態規劃是一種極具時效性的方法，一份測驗題數 30 題的試卷不到 9 秒就可建構完成所需時間成本極低。但是誤差值收斂情形不佳，理論上動態規劃可找到最佳解，然而所得結果卻不符合此項理論，經由分析發現：本研究採用的誤差函數是測驗訊息量與目標訊息量的誤差平方和，而動態規劃在求解二次函數時，誤差值會有遞減再遞增的情形，因此無法找到最佳解(見圖 2)。

(二)、多區間動態規劃程序一效能評估

為了改善動態規劃在求解二次函數時，誤差值會有遞減再遞增的情形，因此我們設計了多區間動態規劃，本節針對程序一的效能說明。

由公式(15)-(18)可知「區間數」的使用對降低時間成本成效極佳。以下為多區間動態規劃與原動態規劃時間關係式：

原動態規劃： $2 \times m \times n$

多區間動態規劃： $2 \times (m/div) \times (n/div) \times div$

m : 測驗題數。

n : 題庫數。

div : 區間數。

由實驗結果顯示，在運用「區間切割」的技術對誤差值收斂成效極佳。然而區間數過大仍會造成誤差值遞減再遞增的情形，不同測驗題數在不同峰態分布下的最佳區間數各不同。表 2 針對最佳區間數，依不同測驗題數在不同峰態分布下進行 9 種測試組合，每種測試的區間數由 1 到 20，每一區間測 100 組平均而成。

表 2. 最佳區間數

測驗題數	分布		
	單峰分布	雙峰分布	一致性分布
30 題	14	9	6
40 題	15	11	7
50 題	15	14	9

將多區間動態規劃最佳區間數之結果與動態規劃依時間、誤差值做一改善率比較，由表 3 表 4 顯示在時間及誤差值收斂方面，多區間動態規劃對動態規劃改善率高達 97% 及 99%。

圖 3 為測驗題數 30 題，一致性峰態分布

下,使用動態規劃及多區間動態規劃(區間數為6)於選題策略時誤差值(誤差平方和)遞減再遞增過大的情形比較。由於動態規劃及多區間動態規劃的誤差值相差較大,以致於對照情形無法明顯地顯示,因此以放大圖(圖4)來輔助說明。由此證明多區間動態規劃的確能有效改善動態規劃在誤差值為二次函數時(誤差平方和),遞減再遞增過大的情形。

表3 多區間動態規劃之時間改善率(單位:秒)

方法		動態規劃	多區間 動態規劃	改善率 (%)
峰態分布 測驗題數				
單峰 分布	30題	10.723714	0.594088	94.46
	40題	17.986293	0.638959	96.45
	50題	27.1494993	0.725096	97.33
雙峰 分布	30題	10.738543	0.742662	93.08
	40題	17.956526	0.814313	95.47
	50題	27.340556	0.816371	97.01
一致 性分 布	30題	10.820938	1.262570	88.33
	40題	18.181884	1.312383	92.78
	50題	26.9856366	1.204100	95.54

時間改善率(%)： $(time_D - time_{MD})/time_D \times 100$
 $time_D$ ：動態規劃的時間平均值。
 $time_{MD}$ ：多區間動態規劃的時間平均值。

表4 多區間動態規劃之誤差改善率

方法		動態規劃	多區間 動態規劃	改善率 (%)
峰態分布 測驗題數				
單峰 分布	30題	21.939600	0.796897	96.37
	40題	45.962173	1.766846	96.16
	50題	71.4309556	3.217943	95.50
雙峰 分布	30題	18.752597	0.946521	94.95
	40題	39.175645	1.493720	96.19
	50題	59.858818	2.315308	96.13
一致 性分 布	30題	7.326124	0.168889	97.69
	40題	12.498603	0.214198	98.29
	50題	22.1102407	0.216517	99.02

誤差改善率(%)： $(error_D - error_{MD})/error_D \times 100$
 $error_D$ ：動態規劃的誤差平方和平均值。
 $error_{MD}$ ：多區間動態規劃的誤差平方和平均值。

(三)、多區間動態規劃程序二 整合 Sun 狀態替換法效能評估

由(多區間動態規劃 + Sun 狀態替換法)、(random 選題法 + Sun 狀態替換法)這二種實驗設計得知：

1. 由表 5 可知以多區間動態規劃方法來初始化測驗,可有效地收斂誤差值,改善率最高可達 99.73%。

2. 使用 Sun 狀態替換法進行調校,在降低誤差值方面,的確能發揮輔助之效(見表 6)。

(四)、與其他新近研究比較

將整合 Sun 狀態替換法的多區間動態規劃法與新近研究方法 Genetic Algorithm、Greedy Approach Neural Network Swanson & Stocking、Wang & Ackerman 做效能比較。實驗結果(見表 7)顯示我們所提多區間動態規劃方法改善率最高可達 99.99%,在誤差值遞減的效能表現極佳,其效能遠優於其他方法;而在時間方面,我們的方法與其他方法的時間相近(見表 8),並未因效能的提升而需付出大量時間的代價。由此顯示多區間動態規劃對測驗之選題策略,提供一快速且精確的技術。

五、結論與建議

本研究中,我們自行設計的多區間動態規劃法可有效地處理目標函數為二次式之問題;經實際運用於選題問題上發現,傳統動態規劃在進行選題時,測驗訊息函數與目標訊息函數兩者間誤差平方和值有遞減再遞增的情形,使用多區間動態規劃法則能有效降低時間成本及誤差值,改善率分別超過 97% 與 99%。

由實驗結果顯示以此技術建構之測驗誤差遠低於其他的五種選題策略(Genetic Algorithm、Greedy Approach、Neural Network、Swanson & Stocking、Wang & Ackerman),對於測驗之選題策略,提供一極快速且精確的技術,也擴展了動態規劃法之運用範圍,對日後動態規劃運用於二次函數,提供一更廣泛用途與更有效益的技術。

誌 謝

本研究計劃,經費由國科會科教處贊助,研究計劃編號: NSC 91-2520-S-024-014。

參考文獻

- [1] Hambleton, R. K., & Swaminathan, H. (1985). Item Response Theory: Principles and Applications. Hingham, MA: Kluwer, Nijhoff.
- [2] Sun, K. T. (2000a). A Genetic Approach to Parallel Test Construction. International Conference on Computers in Education 2000, pp.83-90, The Grand Hotel, Taipei, Taiwan.
- [3] Sun, K. T. (2000b). A greedy approach to test construction problems. Proceedings of

the National Science Council (Part D): Mathematics, Science, and Technology Education, 11(2), 78-87.

- [4] Sun, K. T., & Chen, S. F.(1999). A study of applying the artificial intelligent technique to select test items. *Psychological*, 46(1), 75-88.
- [5] Swanson, L., & Stocking, M. L. (1993a). A method for severely constrained item selection in adaptive testing. *Applied Psychological Measurement*, 17(3), 277-292.
- [6] Wang, C. S., & Ackerman, T. (1997). Two

Item Selection Algorithms for Creating Weakly Parallel Test Forms Using the IRT Information Functions. *Psychological Testing*, 44(2), 123-140.

- [7] Sun, K. T. (2000c). A State Exchange Method for Parallel Test Forms. 2000 International Computer Symposium — Algorithm and Theory of Computation Workshop, pp.156-162, National Chung-Cheng University, Taiwan.

表 5 整合 Sun 狀態替換法之誤差平方和平均值比較

方法		Random 選題法 + Sun 狀態替換法	多區間動態規劃 + Sun 狀態替換法	改善率 (%)
峰態分布 測驗題數	30 題	3.812780	0.324389	91.49
	40 題	5.651230	0.766609	86.43
	50 題	7.655447	1.513786	80.23
單峰分布	30 題	2.174911	0.097501	95.52
	40 題	2.963380	0.175418	94.08
	50 題	2.363705	0.295491	87.50
雙峰分布	30 題	0.414242	0.002633	99.36
	40 題	0.521704	0.002368	99.55
	50 題	0.544083	0.001456	99.73
改善率 (%) : $(error_{R_S} - error_{MD_S}) / error_{R_S} \times 100$				
$error_{R_S}$: Random 選題法 + Sun 狀態替換法的誤差平方和平均值。				
$error_{MD_S}$: 多區間動態規劃 + Sun 狀態替換法的誤差平方和平均值。				

表 6 多區間動態規劃整合 Sun 狀態替換法前後之誤差平方和平均值比較

方法	峰態分布 測驗題數	動態規劃 誤差平均值	多區間動態規劃		多區間動態規劃 + Sun 狀態替換法	
			誤差平均值	改善率 (%)	誤差平均值	改善率 (%)
單峰分布	30 題	21.939600	0.796897	96.37	0.324389	98.52
	40 題	45.962173	1.766846	96.16	0.766609	98.33
	50 題	71.430956	3.217943	95.50	1.513786	97.88
雙峰分布	30 題	18.752597	0.946521	94.95	0.097501	99.48
	40 題	39.175645	1.493720	96.19	0.175418	99.55
	50 題	59.858818	2.315308	96.13	0.295491	99.51
一致性分布	30 題	7.326124	0.168889	97.69	0.002633	99.96
	40 題	12.498603	0.214198	98.29	0.002368	99.98
	50 題	22.110241	0.216517	99.02	0.001456	99.99
改善率 (%) : $(error_{MD} - error_D) / error_{MD} \times 100$						
$error_D$: 動態規劃誤差平方和平均值。						
$error_{MD}$: 多區間動態規劃或多區間動態規劃 + Sun 狀態替換法的誤差平方和平均值						

表 7 多區間動態規劃與其他相關研究誤差平方和平均值比較

方法	多區間 動態規劃	Genetic Algorithm	Greedy Approach	Neural Network	Swanson & Stocking	Wang & Ackerman
峰態分布						
單峰分布	0.000408	0.013925	0.725100	0.694500	0.971500	12.834000
雙峰分布	0.000601	0.005689	0.698600	0.741600	0.275500	2.953600
平均誤差	0.000505	0.009807	0.711850	0.718050	0.623500	7.893800
改善率 (%)	---	94.853699	99.929102	99.929714	99.919055	99.993607
改善率 (%) : $(error_x - error_{MD}) / error_x \times 100$ $error_{MD}$: 多區間動態規劃的誤差平方和平均值。 $error_x$: Genetic Algorithm、Greedy Approach、Neural Network、Swanson & Stocking、Wang & Ackerman 的誤差平方和平均值。						

表 8 多區間動態規劃與其他相關研究時間複雜度比較

方法	多區間 動態規劃	Genetic Algorithm	Greedy Approach	Neural Network	Swanson & Stocking	Wang & Ackerman
時間複雜度	$O(mn)$	$O(n)$	$O(mn)$	$O(mn)$	$O(mn)$	$O(n \log n + mn)$
Genetic Algorithm 的時間複雜度 \propto 世代數目 \times 族群數目 $\times (n + m)$ ，因為世代數目與族群數目為固定常數，且 $m \ll n$ ，所以總複雜度為 $O(n)$ 。						

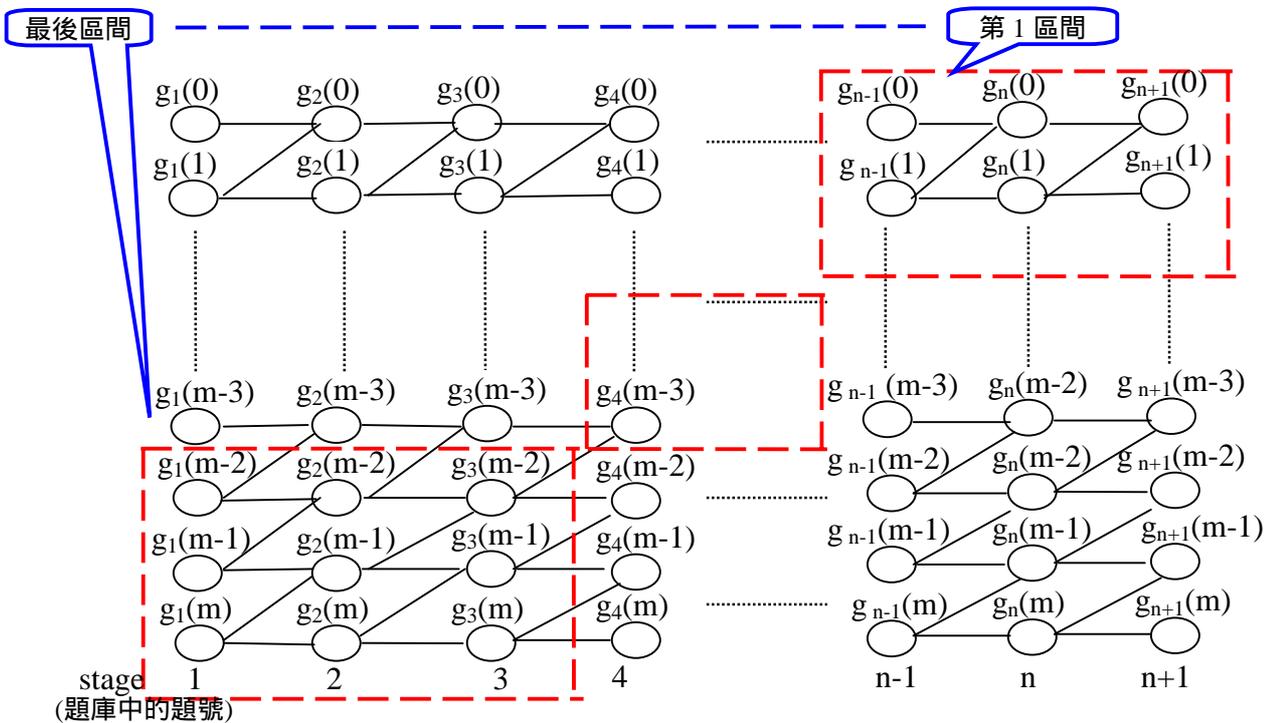


圖 1. 多區間動態規劃運用於選題策略之架構圖

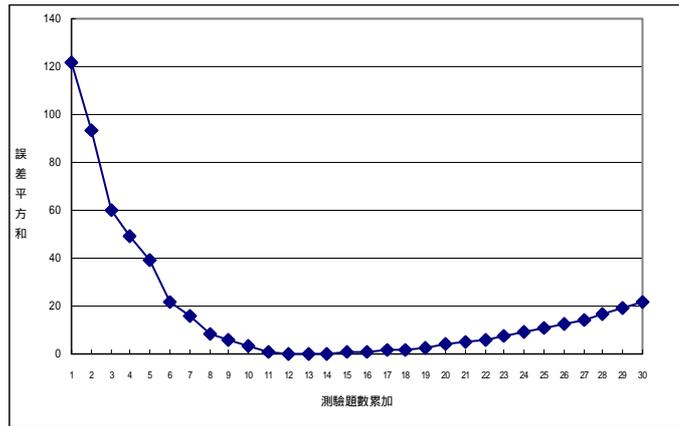


圖 2. 動態規劃之誤差平方和遞減再遞增情形(測驗題數 30 題, 單峰分布)

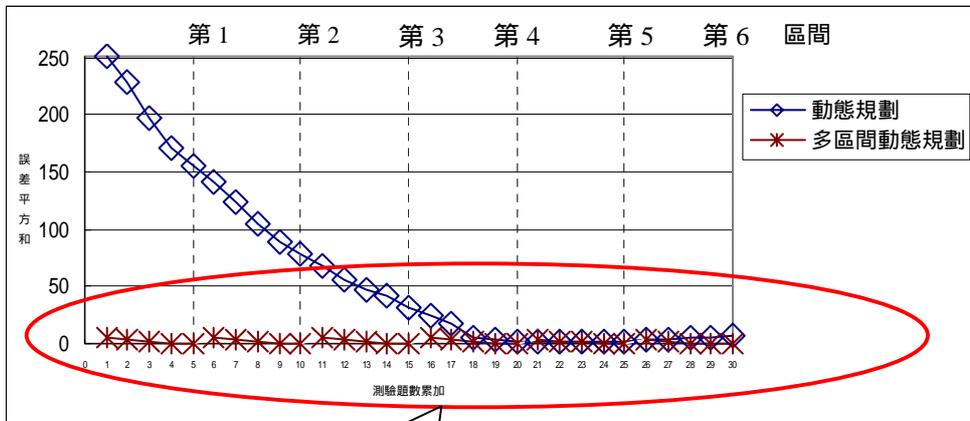


圖 3. 多區間動態規劃與動態規劃對誤差值遞減再遞增過大的情形比較

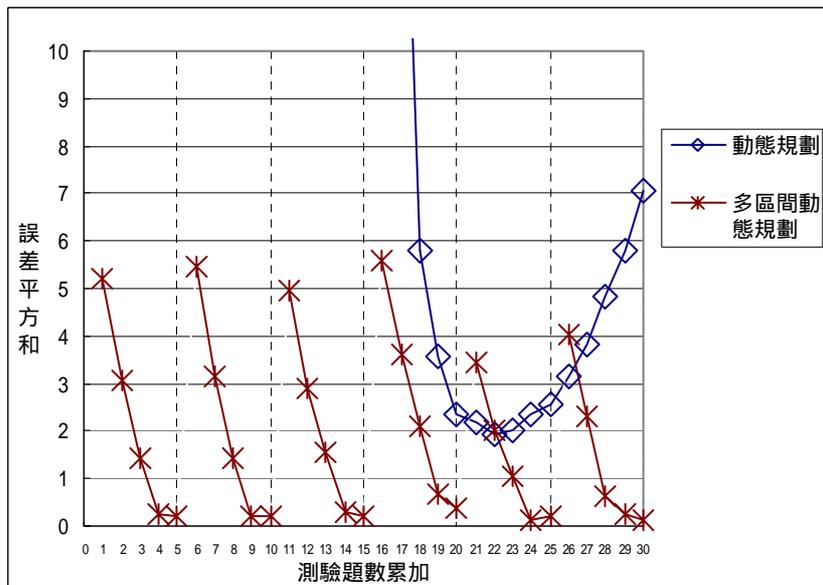


圖 4. 多區間動態規劃與動態規劃對誤差值遞減再遞增過大的情形比較放大圖