

教育部教學實踐研究計畫成果報告  
Project Report for MOE Teaching Practice Research Program

計畫編號/Project Number：PMS107021

學門分類/Division：數理學門

執行期間/Funding Period：2018/8/1~2019/7/31

機率浮現\_機率論結合運算思維之課程設計  
機率論

Visualizing Probability---Computational Thinking in Probability Instruction

計畫主持人(Principal Investigator)：楊菁菁

共同主持人(Co-Principal Investigator)：林英志

執行機構及系所(Institution/Department/Program)：逢甲大學應用數學系

繳交報告日期(Report Submission Date)：2019/9/15

# 機率浮現\_機率論結合運算思維之課程設計

## Visualizing Probability---Computational Thinking in Probability Instruction

### 壹、研究動機與目的

大學應用數學系的機率論教學，多以介紹各種機率分布與機率性質為主，充滿著機率分佈相關性質的推導，已經很難引起學生的興趣。中部某校應用數學系的機率論為二年級必修課，學生對於必修課的態度，常常是修不過再修就好。分析 105 學年教學現況，近 90 名學生中，有半數重修生，而總成績分佈，重修生與二年級生成績的中位數雖差不多，但離散度二年級學生比重修生大，無論原因是二修所以對內容比較熟悉，或是因為要畢業所以較用心，都是教學不樂見的。而二年級生當率高，重修生也跟著多，教學資源不斷消耗，本計畫提出融入運算思維的設計式學習，希望終止這樣的惡性循環。

工程教育改革傳統從理論出發的推導式(Deductive)教學，提出引導式教學(Inductive Teaching and Learning)，包含探究式學習(Inquiry Learning)、問題導向式學習(Problem-based Learning)、計畫導向式學習(Project-based Learning)、事例導向式學習(Case-based Learning)……等，教師的引導方式與學生特質，都關係引導式教學的成功與否，一般而言，引導式教學的效果不比傳統式教學差(Prince & Felder, 2006)。設計以探究(Inquiry)與推論(Reasoning)為基礎，引導學生能產出新成品或新系統，則衍生出以設計為基礎的教學(Design-based Instruction/Learning, DBI/DBL) (Puente, Eijck & Jochem, 2013)。參考眾多引導式教學法後，機率論的教學改革以 Kolodner, Crismond, Gray, Holbrook & Puntambekar(1998)提出設計式學習(Learning by Design, LBD)的教學結構為基礎，以提問、實驗、比較與分析、反思的教學活動循環，漸次加深學習層次的方式，讓學生能在應用數學的基礎課程實作。

Wing 於 2006 年出運算思維(Computational Thinking) 的理念，教導學生先將高複雜度的問題分解(Decomposition)成次問題，對於次問題重複提出解決法、測試直到收斂再由抽象化，最後完成原本問題的解法。Wing 認為這樣的問題解決方式不僅可用於程式設計，更可推廣至理工、人文領域，甚至生活中的問題都可應用。Wing 的主張也得到各國教育部門的重視，美國國家研究會(National research Council, NRC)在 2010 與 2011 都加以討論並提出報告。教育部(國家教育研究院, 2016a)規劃的科技領域課綱中，資訊科技課程方面也強調運算思維，著重設計與實作，增進學生包含應用所學、解決問題、團隊合作、與創新思考等能力。於香港教育局網頁(<http://www.edb.gov.hk/tc/curriculum-development/kla/ma/index.html>) 也看到”應適當運用資訊科技學習數學”的說法。

程式設計為中部某大學應用數學系的大一必修科目，本研究將運算思維導入機率論教學，進一步融入程式設計，建立學生跨領域學習基礎。另一方面，2000 年時 MIT 與瑞典的三間大學共同提出，應用於工程教育的 CDIO(Conceive-Design-Implement-Operate)的課程結構，著眼於學生於實際問題的實作，以創新的發想應用於實際問題，經過不斷的修正得到解答。中部某大學極力推廣 CDIO 課程規劃，且已加入 CDIO 國際合作組織。本研究結合大一

的程式設計(Python)與大二的機率論，建立對應 D 與 I 的的深碗課程，讓學生能將所學科目連結，不再是各個獨立的課程，達到深度學習的目的。本研究於機率論的作業中，安排學生以程式完成作業，並於期末報告鼓勵學生學生以 Python 完成模擬，建立機率論與程式設計之連結。

107 中小學數學課程大綱與以往有極大轉變，其中加強了資料與不確定性的學習內容，在 7 年級加入數據的統計數據與圖表與離散型機率(國家教育研究院，2016b)。105 學年機率論教學，已運用運算思維，設計搭配實務的樣本平均值、標準差、直方圖等(已包含於國高中課程) 與理論於二項分佈機率論教學，應用 EXCEL 與 Google 表單完成課堂實作，獲得初步成功(楊菁菁，2019)。施做的問卷中，有六成二學生認為機率論比想像中具實用性、認同課堂表單實作提高課間注意力、有助於了解課程，更有七成一的學生選擇表單應一周施作一至二次。本研究修正初步設計之運算思維二項分佈教學，融入設計式學習框架，並改良、增刪課堂活動，擴展至其他離散型分佈，完成離散型機率分佈之教學改革，同時可因應未來適用新課綱學生入學，提前改革大學機率論教學。

本研究延續實驗對照理論的教學模式，進一步融入設計式學習自淺而深的循環式教學設計，學生由課堂活動的實作資料模擬得到數據，由數據觀察而了解理論。同時結合程式設計，建立結合機率論與程式設計的跨年級深碗課程。以既有課程加以設計，突破改革，期望完成引發學生學習興趣與動機。

## 貳、文獻探討

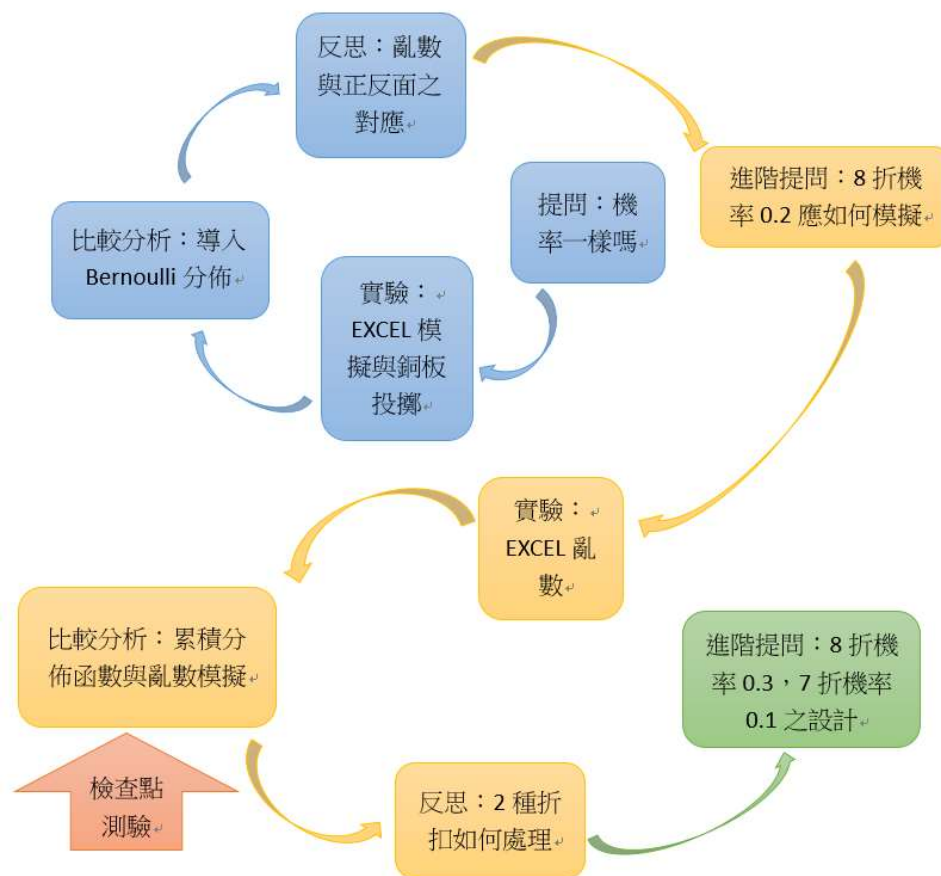
### 一、設計式學習(Learning by Design, LBD)

工程教育已廣泛應用引導式教學，且成效偏向正面(Prince et al., 2006)。Puente et al. (2013)提出應注意的四個面向：(1) 設計符合真實世界(Real-world)，且具開放式，可從不同角度切入的問題，讓學生動手做，可引入跨領域議題；(2) 計畫進行時教師以教練的腳色協助學生；(3)形成性評量可為每周之線上測驗，或學習檢查點測驗，學生報告，或產品原型等，搭配總結性評量，如小組表現同儕互評、期末紙筆測驗、期末報告、或自我評量等；(4)考量增加學生溝通與討論能力，或以競爭引發學習動機等。本研究參考 Kolodner et al. (1998)的設計式學習的循環式教學結構，融入引導式教學應注意的面向，以四個課堂教學活動串聯為一循環的方式建構活動；(1)提問：學生就已備知識嘗試解決實務問題，再引出教學主題；(2)實驗：以學習工具實驗、觀察引出教學主題；(3)比較與分析：比較實驗結果與理論，拓展與應用學到的知識；(4)反思：拋出反思議題，引出下一個教學主題。以夏日超商折扣機台設計之第一、二教學活動循環為例，課堂規劃列於表一，循環方式如圖一。

本研究完成之離散型分佈設計式學習，包含一般離散型、Bernoulli、Binomial、Geometry、Negative Binomial、及 Hyper-Geometry。同時完成柴比雪夫不等式、隨機變量線性函數、與線性組合的教學設計，本部分可活用於離散型或連續型分佈。

表一 折扣機台設計之第一、二教學活動循環

迴圈	活動階段	內容	教學主題	活動
第一迴圈	提問	EXCEL 模擬的正面出現機率與銅板投擲是否相同?	僅投擲一次，如何判斷正面機率?	
	實驗	紀錄投擲銅板一枚，與 EXCEL 投擲一次的結果	資料收集、呈現與分析	EXCEL 亂數生成，銅板投擲，Google 表單填寫，即時查看表單結果
	比較與分析	哪邊正面機率大	Bernoulli 分佈	理論導入，比較不同正面機率下的分佈
	反思	亂數與正反面如何對應?		
第二迴圈	提問	超商以結帳機台抽籤方式決定折扣，若 8 折的機率 20%，應如何設計?		
	實驗	EXCEL 亂數生成、是否獲得折扣	Bernoulli 分佈之累積生成函數與模擬	Google 表單填寫，即時查看表單結果。觀察亂數與折扣的對應。
	比較與分析	建構 0 至 1 亂數，與累積分布函數之關聯。		檢查點測驗
	反思	8 折機率 30%，7 折機率 10% 之機台如何設計	機率與累積分布函數之變化	導入下一個教學循環：一般離散型機率分布。
	作業	每組繪出指定折扣機率之累積分布函數，以 EXCEL 完成簡易機台。		



圖一 第一、二教學循環迴圈圖

本研究規劃設計式學習之課堂模式，根據 Puente et al. (2013)之建議，以實際應用面規劃課堂學習活動，以檢查點測驗，與設計之學生可分組完成、結合理程式設計或 EXCEL 之作業為形成性評量。課堂與線上測驗檢查點範例列於表二，分組作業如表一所述。總結性評量則以紙筆測驗與學生專題報告實施。

表二 檢查點範例試題

檢查點	範例試題	測驗目標
課堂檢查點	若 $X=1$ 代表 8 折， $X=0$ 代表原價，機台設計 8 折的機率為 $p$ (變動值)，0 至 1 間隨機生成值 $u$ (變動值)，回應折扣為(1)無折扣，(2)8 折	了解累積分布函數
單元檢查點 (二項分布)	若某個銅板出現正面的機率 0.3，投擲 10 次比較不可能出現幾個正面? (a) 2 個 (b) 4 個 (c) 6 個	了解期望值附近對應之機率較大
	對於二項分佈的敘述，以下何者正確 (a)期望值大於變異數 (b) 變異數大於期望值 (c)兩者皆可能	了解二項分布 $BIN(n,p)$ 性質 期望值 = $np$ 變異數 = $np(1-p)$

## 二、運算思維

運算思維於中小學(K-12)教學已有頗多討論(Barr & Stephenson, 2011; Grover & Pea, 2013; Lye & Koh, 2014; Shute, Sun & Asbell-Clarke, 2017), 也已有針對運算思維運用於 STEM(Science、Technology、Engineering、Mathematics)教學的討論(Swaid, 2015), 多數的討論聚焦於運用 Lego, Alice, Scratch 等模組式程式, 增進學生運算思維能力。Barr et al. (2011) 列舉資料處理、分解問題、抽象化處理、演算、自動化、平行推展、與模擬為 1 至 12 年級學生, 在數學方面應具備的運算思維能力。楊菁菁(2019)已將初步設計的二項分佈教學與之對應, 本研究因應 105 學年的教學現場狀況, 融合運算思維與設計式學習, 改進二項分佈教學, 並延伸至其他離散型分佈教學。以表一中的第二迴圈為例, 將數學運算思維能力, 與設計式學習教學之對應列於表三。另以隨機變量之線性函數為例, 設計式學習之教學, 與運算思維能力之對應列於表四, 作為本研究導入運算思維於設計式學習的範例。課堂應用本研究開發之工具、EXCEL、與 Google 表單幫助學生學習, 同時設計學生分組實作, 鼓勵學生以程式語言 Python 進行實作驗證, 完備對應 CDIO 之 D 與 I 的的深碗課程架構。

表三 第二迴圈之運算思維能力、機率論教學與活動階段之對應範例

活動階段	課堂活動	運算思維能力
提問	超商以結帳機台抽籤方式決定折扣, 若 8 折的機率 20%, 應如何設計?	
實驗	學生活動: 課堂學生投擲銅板, Google 表單收集學生實作結果	資料收集
	觀察直方圖	資料呈現
	計算平均值、樣本標準差	資料分析
比較與分析	建構 0 至 1 亂數, 與累積分布函數之關聯。	抽象化
	導入分佈理論	檢查點測驗
反思二	8 折機率 30%, 7 折機率 10%之機台如何設計	平行推展
	作業: 每組繪出指定折扣機率之累積分布函數, 以 EXCEL/Python 完成簡易機台。	發展演算流程、模擬

表四 隨機變量線性函數之教學循環

活動階段	課堂活動	運算思維能力
提問	將單位從公斤轉為公克有何影響	
實驗	課堂學生以 EXCEL 模擬器得到指定隨機變量 X(離散型或連續型)與 5X 值, Google 表單收集學生實作結果	資料收集
	觀察 X 與 5X 直方圖	資料呈現
	觀察 X 與 5X 平均值、樣本標準差變化	資料分析
比較與分析	以 100, 500, 1000 份樣本, 引導學生觀察直方圖、平均值、樣	問題分解

析	本標準差變化(本研究已完成動態教材)		
	理論導入	檢查點測驗	抽象化
反思	以 $E(aX)$ 、 $V(aX)$ 變化，論述乘以 $a$ 產生的影響		平行推展
作業：分組以不同 $a$ 值與機率分布，以 EXCEL 或 Python 得到 300 份模擬樣本，並繪製直方圖、計算平均值與樣本變異數，並與理論值比較，加深印象。			發展演算流程、模擬

### 叁、研究方法

本研究建置之離散型機率分佈設計式學習教學設計，搭配 107 學年上學期開課之機率論課程實施，以形成性與總結性評量評估學生學習成效。

#### 一、形成性評量

形成性學學習評量包含課堂檢查點、線上 Maple TA 測驗、與分組作業。課堂檢查點測驗於課堂教學結束後施測，即時檢視成效。線上 Maple TA 測驗於單元結束後施測，開放時間為一周。線上測驗內容包含伯努力、二項分佈、幾何、負二項分佈、綜合題等(範例請見表二)。試題題幹相同，配合 Maple TA 可改變數字的功能，每位學生看的題目相同但數字改變，選項亦可隨機變化。答題完成後，學生可及時得到回饋，教師可隨時上線檢視學生作答結果。

分組作業建議學生以 Python 完成，107 學年之二年級學生，大一程式設計課程已改為 Python，故分配作業時，當屆二年學生要求以 Python 完成，重修生則開放可使用 EXCEL(範例請見表一、三、四)。以機率論作為 Python 的延伸應用課程，透過機率論習題的程式撰寫，深化學生運算思維與程式之實作能力，達到深度學習。

#### 二、總結性評量

總結性評量包含離散型隨機變量之紙筆測驗與期末報告。本研究於兩次之紙筆測驗中設置連結試題，比較 106 與 107 學年學生之學習差異。分組期末報告要求學生規劃類似抽獎機台之機率相關應用，並以模擬驗證是否符合設計之機率結構，期末每組上台報告，教師與同學就機率結構複雜度，模擬驗證設計之結果、報告表現、與投影片完成度以 RUBRICS 評分。

### 肆、教學暨研究成果

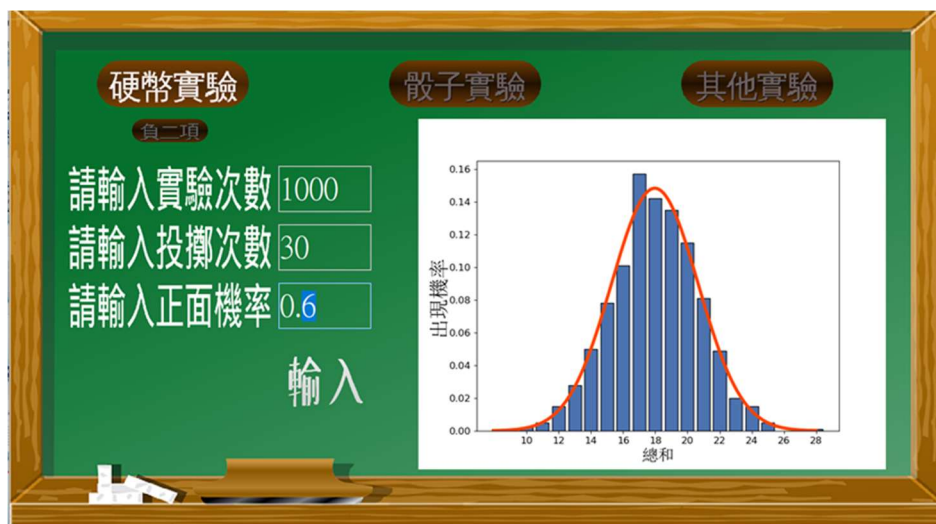
離散型機率約佔機率論課程之一半，分別就課堂活動、設計式學習教學、紙筆測驗分析、期末報告之成果、反思、與學生反饋，及研究成果發表敘述於下。

## 一、設計式學習教學

設計式學習之教學活動於離散型機率分佈實施，因應 105 學年時發現學生的機率概念模糊，於是增加表一中第一迴圈的機率奠基活動，以銅板投擲與 EXCEL 模擬結果之比較，建立機率概念。幾何、負二項、與超幾何分佈則以撲克牌進行教學活動，以超幾何分佈為例，指定中獎撲克牌，以抽後放回與不放回實驗，讓學生分別二項與超幾何分佈。期末收集之學生反饋問卷(43 份有效問卷)顯示，9 成以上學生認為銅板與 EXCEL 實現，有助於了解機率概念；亦有 9 成以上學生同意撲克牌實驗有助於了解錯誤決策機率。課前問卷僅 45% 學生認為自己機率論可以學得好，但期末時有 6 成 5 以上學生認為自己學得比預期好；9 成 5 學生同意在機率論學到東西；9 成以上的學生認同機率論也可以很實用，達到本研究改革教學法之目的。唯學生對於機率論的焦慮並未降低，仍維持 4 成 5 左右學生，對於機率論有焦慮感，推測可能與增加期末報告，讓學生感覺壓力增加有關。

鑒於課堂活動中原本使用 EXCEL 模擬銅板，須讓學生下載 EXCEL 檔案，學生可於使用之函數推測設定之機率，本研究於是建置網路投擲網頁，以下拉式選單選擇投擲次數，網頁即時回饋正反面發生次數，教師可於課前至網頁後台更改正面出現機率。由於機率論為上學期課程，投擲網頁於期中始完成，僅於大樣本教學時初步試用，將於 108 學年正式上線。

本研究另開發大量模擬結果展示工具，模擬分佈選項包含二項(投擲一次則為 Bernoulli 分佈)、負二項(一次面則為幾何分佈)、與超幾何、布阿松分佈，實驗次數由 1 至 1 千，實驗重複次數也可高至 1 千，以展示實驗之不確定性，讓學生觀察，並可用於中央極限定理教學，其模板如圖二。



圖二 本研究開發之模擬結果展示工具

## 二、紙筆測驗分析

本研究於兩次紙筆測驗建置連結試題(題幹相同，數字變化)，分析第一次測驗之連結試題，107 學年學生成績顯著高於 106 學年。分析第二次測驗之連結試題時，以第一次測驗連結試題作為 Covariate，進行 ANCOVA 分析，107 學年學生仍表現優於 106 學年

學生(請見表五)，設計式學習成效顯然不遜於傳統教學。

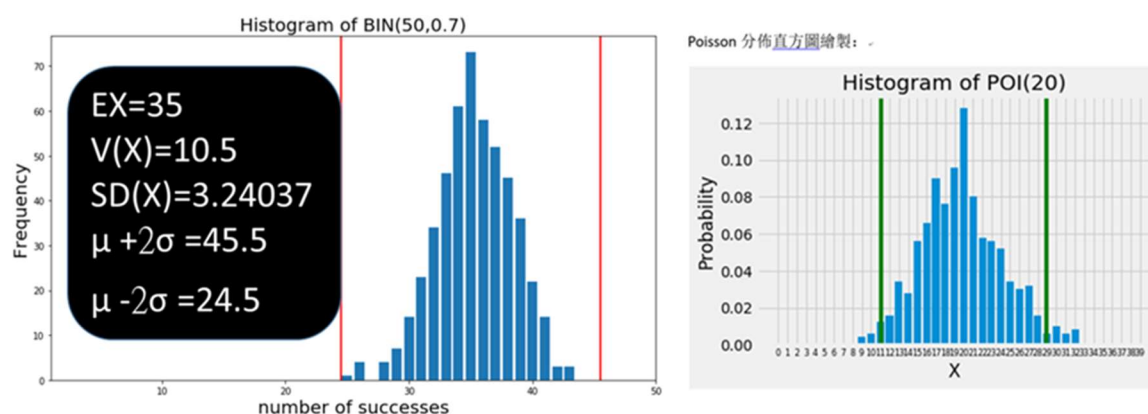
表五 紙筆測驗分析結果

第一次測驗之連結試題				第一次測驗之連結試題			
學年	樣本數	平均值	標準差	學年	樣本數	平均值	標準差
106	73	16.67	5.92	106	73	5.86	7.84
107	67	19.00	6.08	107	67	16.01	8.37
T 檢定之 p-value=0.023**				Source	d.f.	F	p-value
				Test1_1	1	18.57	0.000**
				學年	1	47.55	0.000**
				Error	137		
				Total	139		

註：Test1\_1 為第一次測驗之連結試題分數

### 三、期末分組作業與報告

分組作業部分以柴比雪夫不等式為例，教師提出之範本為 0 至 1 間的一致分佈模擬，與其二項分佈  $BIN(10,0.5)$ ，計算期望值兩倍標準差之理論機率值，與對應之模擬結果比例，學生完成包含二項、負二項、超幾何、布阿松、指數、卡方、Gamma、F、T 等分佈之樣本模擬，與期望值之 2 倍標準差間之理論機率值及養本比例的觀察(如圖三之範例)。



圖三 學生作業-柴比雪夫不等式

期末分組報告總共 16 組，每組報告 5 分鐘並接受提問 1 分鐘，分 3 節課實施，學期間要求每組每月至少跟教師報告進度一次，除報告之 PPT，並繳交書面報告與資料

檔。學生之創意產出分別為遊戲類之蛋龍抽卡、彈珠檯、撲克牌射龍門；抽獎類之一番賞、抽抽樂、冰棒集點；其中有一組鎖定餐食選擇，完成各種選餐之不同機率分佈設定，並產出可下載使用之選餐 APP(學生報告範例請見附件)。學生報告之主題貼近學生生活，學生實際發現、發想生活中與機率相關的主題，期初問卷僅 51% 學生認為報告會有不一樣的學習經驗，期末問卷超過 72% 學生認同報告獲得不同的學習經驗。

#### 四、分享與發表

本研究成果已於 2019 年 5 月 24 日舉辦之「2019 創新教育與教學實踐研究論壇」，以“設計為基礎之機率論教學融入運算思維與 CDIO”之名稱發表。目前亦投稿於 2019 年 11 月於澳洲舉辦之 Delta Conference。並規劃投稿於期刊，故請延後公開時程。

本研究完成離散型機率分佈之設計式學習教學，於 107 學年初步實施，學生實際感受機率論的實用性，並成功提升學生學習成效，同時引導學生發現、連結生活中之機率，創意發想相關報告主題，達到研究目標。為進一步落實 CDIO 之 D 與 I 的的深碗課程架構，108 學年將以 Bernoulli 分佈與一般型隨機變量之模擬，與大一之計算機概論課程結合，進行協同教學，使大一學生能體驗機率論與程式之連結，希望進一步提升學生學習動機，於 109 年該屆學生修習機率論時，將再與 107、108 年學生比較，進行學習成效分析。

#### 伍、參考文獻

##### 英文

Barr, V. & Stephenson, C. (2011). Bring Computational Thinking to K-12 : What is Involved and What is the Role of the Computer Science Education Community? *ACM Inroads*, 2(1), 48-54. doi:10.1145/1929887.1929905

Bennett, S., Agostinho, S, Lockyer, L., Kosta, L., Jones, J., Koper, R. & Harper, B. (2007). *Learning Designs: Bridging the Gap between Theory and Practices. In ICT: Proving Choices for Learners and Learning*. Proceedings ascilite Singapore 2007, 51-60. Retrieved from <http://www.ascilite.org/conferences/singapore07/procs/bennett.pdf>

Grover, S. & Pea, R. (2013). Computational Thinking in K-12: A review of the State of the Field. *Educational Researcher*, 42(1), 38-43.

Kolodner, J. L., Crismond, D., Gray, J., Holbrook, J., & Puntambekar, S. (1998). *Learning by Design from Theory to Practice*. Proceedings of the International Conference of Learning Science, 98, 16-22.

Lye, S. Y. & Koh, J. H. L. (2014). Review on Teaching and Learning of Computational Thinking through Programming: What is Next for K-12? *Computers in Human Behavior*, 41(2014), 51-61.

National research Council. (2010). *Report of a Workshop on the Scope and Natural of Computational Thinking*. Retrieved from [http://www.nap.edu/catalog.php?record\\_id=12840](http://www.nap.edu/catalog.php?record_id=12840).

National research Council. (2011). *Report of a Workshop of Pedagogical Aspects of Computational Thinking*. Retrieved from [http://www.nap.edu/catalog.php?record\\_id=13171](http://www.nap.edu/catalog.php?record_id=13171).

Prince, M. J. & Felder, R. M. (2006). Inductive Teaching and Learning Methods: Definitions, Comparisons, and Research Bases. *Journal of Engineering Education*, 95(2), 123-138. doi: 10.1002/j.2168-9830.2006.tb00884.x

Puente, S. M. G., van Eijck, M. & Jochem, W. (2013). A Sampled Literature Review of Design-based Learning Approaches: A Search for Key Characteristics. *International Journal of Technology and Design Education*, 23(3), 717-732.

Shute, V. J., Sun, C. & Asbell-Clarke, J. (2017). Demystifying Computational Thinking. *Educational Research Review*, 22, 142-158.

Swaid, S. I. (2015). *Bring Computational Thinking to STEM Education*. AHFE 2015. doi: <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2015.07.761>

Wing, J.M. (2006). Computational Thinking, *Commu. ACM*, 49(3), 33-35.

## 中文

國家教育研究院(2016a)。十二年國教科技領域課綱草案。取自  
<http://www.naer.edu.tw/files/15-1000-10471,c639-1.php?Lang=zh-tw>

國家教育研究院(2016b)。十二年國教數學領域課綱草案。取自  
<http://www.naer.edu.tw/files/15-1000-10610,c639-1.php?Lang=zh-tw>

楊菁菁(2019)。運算思維與機率論教學初相遇。 *高等教育研究紀要*，10，81-90。

## 陸、附件-學生期末報告

### 蛋龍抽卡



黃龍跟藍龍抽出金蛋跟銀蛋的機率不同

0	0.75%	當“運氣夠好”時,你能夠在藍龍的嘴中拉出中鑽石蛋七星卡
10%	29.25%	
90%	70%	



Simulation results showing card IDs and counts:


- X 88081, X 88034, X 87946, X 87974
- X 11842, X 11909, X 11973, X 11968
- X 77, X 57, X 81, X 58
- X 87952, X 879668
- X 11965, X 119567
- X 83, X 765

Progress: 10萬抽, 1000000 開始

### 一番賞

#### 研究動機及參考資料

✓研究動機：一番賞A賞太難抽了，所以想試算它的機率  
 ✓參考資料：



★獎品數一覽★

- A賞 >>數量2
- B賞 >>數量3
- C賞 >>數量7
- D賞 >>數量20
- E賞 >>數量20
- F賞 >>數量12
- G賞 >>數量36
- 最後賞 >>數量1

#### EXCEL測試



Excel spreadsheet showing simulation results for 100,000 draws. Columns include draw ID, prize type, and prize count.

### 選餐 APP

#### 前言

不知道今天要吃什麼嗎?  
 讓我們來解決你的困擾吧!  
 今天我們就開辦了這樣一間餐廳,叫做“吃什麼”  
 給選擇困難的你一個APP,由機率來決定你的午飯吃什麼~



你的午餐,就由機率來決定吧!

#### APP展示



Buttons: 按鈕, 選擇一個你喜歡的數字