

教育部教學實踐研究計畫成果報告

Project Report for MOE Teaching Practice Research Program

計畫編號/Project Number：PMS1110019

學門專案分類/Division：數理

計畫年度：111 年度一年期 110 年度多年期

執行期間/Funding Period：2022.08.01 – 2023.07.31

運用逐步引導式教材協助學生化解「微積」

微積分

計畫主持人(Principal Investigator)：魏傳昇

協同主持人(Co-Principal Investigator)：

執行機構及系所(Institution/Department/Program)：逢甲大學／應用數學系

成果報告公開日期：立即公開 延後公開（統一於 2025 年 7 月 31 日公開）

繳交報告日期(Report Submission Date)：2023 年 09 月 日

運用逐步引導式教材協助學生化解「微積」

一. 本文 Content

1. 研究動機與目的 Research Motive and Purpose

任何科目的學習成效除了仰賴授課教師對於課程內容的精心設計與演示之外，學習者自身是否願意付出努力也佔據相當重要的部分，尤其是數學科目的學習更是如此。以微積分這門大學的基礎數學課程來說，學生本身必須具有一定程度的先備知識，亦須要搭配課堂進度適時地深入思考、解決疑惑及反覆練習才有可能把它學好。此外，與高中數學的內容相比，更多抽象名詞與符號在微積分課程中頻繁地使用，學生若不能正確解讀它們的涵義與使用的方式便很容易產生迷思概念而不自知，此狀況也是造成學習困難的原因之一。由於微積分內容的複雜程度已超過大部分學習者認知負荷的能力範圍，因此經常受挫的經驗便使得學生萌生放棄的念頭，陷入原本就低落的學習動機與消極的學習態度，不斷惡性循環。

綜合上述情況，本計畫旨在發展出一套能結合教師課堂講授以及學生課後練習皆宜的學習教材，教材主要的特色為降低學生的認知負荷並能逐步引導學生釐清錯誤的迷思、增進概念的理解，更重要的在於期望能提升學生自我學習的能力。因此，本計畫的目的為以下三點：

- (1)透過對步驟的拆解，降低學生認知負荷。
- (2)設計常見錯誤類型入題，減少學生迷思概念。
- (3)培養學生自主學習，逐步提升學習成效。

2. 研究問題 Research Question

本計畫主要的研究問題的包括：

- (1)逐步引導式教材對學習成效的影響。
- (2)逐步引導式教材對學習態度與能力的影響。
- (3)逐步引導式教材對學習策略(後設認知)的影響。

3. 文獻探討 Literature Review

認知負荷理論：

依學習教材內容的難易程度、教材呈現的方式、教學活動及學習者本身的學習狀況來分類，可將**認知負荷**分為內在認知負荷(intrinsic cognitive load)、外在認知(extraneous cognitive load)，以及增生認知負荷(germane cognitive load)。其中，學習者在面對較困難的教材時會產生內在負荷，也易因學習者不具足夠的先備知識而產生內在負荷；若因教材呈現方式不佳或是不當的教學活動則會引起外在負荷；增生認知負荷則因學習者在面對適當設計的教材或是使用適當的學習策略時，為克服內在負荷所需額外增加的認知資源的負荷，而此負荷因有利學習，故可將其視為有效的認知負荷(effective cognitive load)。

學者 Sweller(1988；2010)依據認知負荷理論提出多種可降低外在認知負荷的教學效應，其中，本研究將採用的分別有：範例效應(worked example effect)、完成問題(problem completion effect)、分散注意力效應(split attention effect)、冗餘效(redancy effect)。然而，值得注意的是，Kalyuga、Ayres、Chandler 與 Sweller(2003)的研究顯

示，對於已具備一定程度的學生，強迫根據範例效應的呈現方式學習，反而導致他們產生外在認知負荷，因而影響其解題的表現，此即所謂的「專家反轉效應」(expertise reversal effect)。由此可知，使用範例效應的教學法對初學者較能產生良好的學習成效。此外，我們從國內相關的認知負荷的文獻中發現不少與數學學習有關的探討(涂金堂，2011；2012；許文清、吳慧敏、譚寧君、楊凱翔，2013；黃一泓、虞翔，2014)。

4. 教學設計與規劃 Teaching Planning

教學方面除傳統的板書授課之外，我們針對教學進度提供對應的**逐步引導式教材**(詳見附件)，讓學生能於課後透過教材的使用進一步培養**自主學習**的習慣。教材主要分成兩種類型，一種是**學習指引**，另一種則是**自我檢視**。學習指引的編寫主要是根據負荷理論的文獻將學習內容拆解成小步驟進行解說，並將學生常犯的錯誤類型放置在範例演練的部分以提醒學生避免發生，此外，也有明確的學習目標分類，讓學生在學習時清楚知道該部分的學習重點。至於自我檢視的部分則是與學習指引相對應來設計練習題庫，主要作法是根據指引的學習目標以及題目的難易程度做分類，設計逐步推演的順序讓學生在操作時可以依循步驟來完成。

另一方面，為了檢驗學生使用教材的狀況，我們也設立檢核機制進行追蹤與考核。檢核的次數共有四次，實施的時間點分佈在期中考前與期末考前各兩次，而檢核的方式除了小考之外，另搭配考前自評問卷以釐清學生使用教材的感受以及對學習內容的認知程度。具體作法為，每次小考前一週發布考前自評的內容並於考試前5分鐘進行填答，而問卷的填答納入小考分數的一部分(佔15%)，學生只須完成填答即可獲得分數，可有效提升學生參與小考以及填答的意願。實施問卷的效益不僅讓學生可於考試前一週就能預先掌握小考重點及準備方向，同時也讓教師可將填答的結果作為教學及教材編修的參考依據。

除此之外，針對表現不理想的學生我們則是建立補救措施的機制，具體方式是透過加分誘因並搭配同儕間的合作學習，讓表現優異的學生擔任輔導與驗收者的角色來改善補救者的學習狀況。

5. 研究設計與執行方法 Research Methodology

於期初，即開學第一週，實施前測問卷，問卷的面向包含學生的學習態度與能力、教材的使用經驗以及在學習上的策略等，目的在掌握學生於計畫實施前的狀態並作為後續評估的基準點。待計畫實施之後，則在期末收集學生的後測問卷並進行資料處理等相關事宜並分析研究計畫的成果(使用SPSS軟體)。此外，如前述所進行的四次小考以及自評問卷的資料亦是計畫績效的評估依據。最後，我們除了進行前後測改變的顯著性檢定之外，也將上述三個面向的後測結果與期中及期末成績做相關性的檢定，進一步釐清計畫的實施與總結性評量(期中考與期末考)的相關程度。

6. 教學暨研究成果 Teaching and Research Outcomes

(1) 教學過程與成果

平常的教學模式與傳統授課無異，本計畫的主軸在於製作教材以及檢核學生使用後的效益。從四次小考的自評問卷中可發現，學生對於教材的使用狀況與感受程度都十分正面肯定。下表是針對學生在四次檢核點所回收的問卷結果，其中，表1是針對學生認為學習指引是否有成功引導學習的符合程度，結果有八成至九成的學生達到符合以上的程度；表2則是針對學生認為自我檢視題是否有成功讓人熟悉觀念的狀況，結果有七成至八成多的學生達到符合以上的程

度。

表 1 學生認為**學習指引**有成功引導學習的符合程度

符合程度 檢核點(樣本數)	完全 沒閱讀	非常 不符合	不符合	符合	非常符合
第一次小考(N=224)	11%	1%	1%	52%	36%
第二次小考(N=228)	11%	1%	2%	49%	37%
第三次小考(N=217)	12%	0%	3%	45%	40%
第四次小考(N=215)	14%	0%	2%	44%	40%

表 2 學生認為**自我檢視題**有成功讓人熟悉觀念的符合程度

符合程度 檢核點(樣本數)	完全 沒練習	非常 不符合	不符合	符合	非常符合
第一次小考(N=224)	19%	0%	2%	47%	31%
第二次小考(N=228)	14%	0%	1%	50%	34%
第三次小考(N=217)	18%	0%	2%	43%	36%
第四次小考(N=215)	18%	0%	2%	42%	38%

此外，我們亦進行問卷釐清學生覺得那些教學措施對學習效益有幫助(可複選)，結果如下表 3，其中，認為使用教材具有效益的人數為八成五是最高的。

表 3 那些教學措施對學習有幫助(可複選)

教學措施	認同的比例(N=154)
老師在課堂上用黑板的講解與說明	81.8%
課後的 學習指引 與 自我檢視 等教材	85.7%
定期的小考评量	60.4%
每次小考的考前自評填寫	42.2%
其他	3.2%

在前後測的部分(使用五點量表，符合程度最低為 0，最高為 4)，研究結果顯示學生在**學習態度與能力**面向(共 11 個問題)較無顯著改變(見下表 4)，而在**教材使用感受與效益**方面(共 8 個問題)則有顯著改變(見下表 5)，在**學習策略**(共 8 個問題)的面向則是部分有顯著改變(見下表 6)。

表 4 學習態度與能力面向之前後測顯著性

學習態度與能力(N=184)	前測	後測	顯著性
1. 我會樂意去學習新的數學(微積分)概念	2.91	2.83	-
2. 大部分的數學(微積分)作業我都能如期完成	2.87	2.94	-
3. 在數學(微積分)學科上考不好會使我更加努力	2.84	2.93	-
4. 老師指定的數學(微積分)作業我大多有能力去做	2.60	2.90	$p < .001$
5. 在數學(微積分)學習上，我是個能自動自發的人	2.43	2.33	-
6. 我通常在數學(微積分)問題還沒做完時就放棄了	1.13	1.02	-
7. 當遇到不會的數學(微積分)問題時，我會繼續嘗試直到會做為止	2.66	2.70	-
8. 就算是不喜歡的數學(微積分)問題，我仍然會堅持把它做完。	2.49	2.57	-
9. 新的數學(微積分)概念看起來很困難時，我會避免去學習它	1.30	1.20	-
10. 我會樂意解決具有挑戰性的數學(微積分)問題	2.54	2.41	-
11. 看到同學在數學(微積分)科上的成功會使我更努力去學習	2.77	2.72	-

表 5 教材使用感受與效益面向之前後測顯著性

教材使用感受與效益(N=184)	前測	後測	顯著性
1. 我接觸過的數學教材(老師編輯的微積分教材)內容大都編排的淺顯易懂	2.20	3.30	$p < .001$
2. 我接觸過的數學(微積分)教材大都能達到輔助學習的效果	2.59	3.47	$p < .001$
3. 在過去閱讀數學(微積分)教材的經驗中,我總能看懂教材內容的敘述	2.43	3.20	$p < .001$
4. 在過去的經驗中,我願意花費心力練習數學(微積分)教材中的題目	2.74	3.22	$p < .001$
5. 只要花費夠多的心力來練習數學(微積分)教材,我就能拿到好成績	2.38	3.23	$p < .001$
6. 在過去接觸的數學(微積分)教材中,大都能協助我理解相關的數學知識及技能	2.67	3.30	$p < .001$
7. 過往的數學(微積分)教材中,不管內容如何設計編排都無法有效引導我學習	1.03	0.86	$p < .05$
8. 無論花費多少心力來練習數學(微積分)教材,我依然拿不到好成績	1.17	0.86	$p < .001$

表 6 學習策略面向之前後測顯著性

學習策略(N=184)	前測	後測	顯著性
1. 算數學(微積分)時,我能詳細寫出過程,而非只是算出答案	2.47	2.68	$p < .01$
2. 我能利用邏輯推理來解決數學(微積分)問題,而非死背計算過程	2.64	2.70	-
3. 當算出的答案與解答不同時,我有能力判斷哪裡出問題	2.37	2.60	$p < .01$
4. 我能將新學到的數學(微積分)內容與過去的舊知識做成連結	2.43	2.54	-
5. 我有能力運用教師或其他資源所提供的教材學好數學(微積分)	2.58	2.83	$p < .001$
6. 遇到不會解的數學(微積分)題目,我能先找出題目的重要訊息	2.48	2.59	-
7. 解數學(微積分)題時,我能整合相關的訊息,以規劃解題方向	2.37	2.60	$p < .05$
8. 解題後,我會思考在計算過程中運用了那些數學(微積分)知識	2.09	2.23	-
9. 解題後,我有能力檢驗自己是否獲得正確的數學(微積分)知識	2.34	2.49	$p < .05$
10. 數學(微積分)考試結束後,我能評估自己的缺失所在	2.58	2.77	$p < .05$
11. 數學(微積分)考試結束後,我能對於缺失之處持續地進行改善	2.60	2.68	-

最後,我們將上述三個面向的後測結果與期中考及期末考做相關性檢定,結果顯示考試表現與各面向皆為正相關且顯著(見下表 7)。

表 7 期中考與各面向之相關程度檢定

	1	2	3	4
1. 期中考成績	-			
2. 期末考成績	.76**	-		
3. 學習態度與能力	.32**	.41**	-	
4. 教材使用感受與效益	.32**	.45**	.56**	-
5. 學習策略(後設認知)	.39**	.44**	.77**	.51**

(2) 教師教學反思

在過往的教學經驗中,經常想在課堂上將複雜的微積分抽象概念與技巧性的運算過程完整傳達給同學,卻往往礙於時間與進度壓力而不得不做妥協。因此,對於程度較弱、無法在課堂上立即領悟的學生們,也只能希冀他們能靠著反覆努力以及多方請教的方式來克服困難。然而,根據以往的經驗,幾乎只有少數同學能夠在這種情況下堅持到最後,其餘大部分跟不上學習節奏的人則是早早舉白旗投降而放棄學習。

不過,這次的教學計畫經驗卻讓上述現象帶來了一些改變,由於本次計畫的教材設計讓多數程度不佳的學生也願意花時間來學習,不僅堅持到最後的人

變多了，學生在學習上的效益也產生了一些改善，例如以往須要經常在課堂上耳提面命的錯誤類型發生率降低了，而學生撰寫的計算過程也比以往都來的詳細而且正確。這代表合適的自學教材對於學生的學習是十分的必要的，尤其是對於程度比較不理想的學生更是如此。這次教學計畫的實施讓本人了解到教學者不僅要站在學習者的角度與觀點出發，對於任何在學習上的細節也都應該要納入考量，因為教學絕不只是單純地把課程內容丟給學生而已，就像投捕手的關係一樣，如果捕手不具有接捕變化球或是高速直球的經驗，那麼投手再怎麼厲害都無法有效的將球投進捕手的手套裡。

(3) 學生學習回饋

以下的回饋意見是在學期末時向學生進行收集問卷的摘要結果：

請具體說明教材對你帶來甚麼效益

- s：自我檢視的題目有時會有連貫性 假如第三題比較難 通常在 1.2 題就會有提示 讓第三題比較好做。我覺得這是很好的編排 有助於在自學方面的思考邏輯
- s：若在課堂上聽見的概念沒能即時理解，回家看學習指引的時候會因為對概念有印象且指引又寫的淺顯易懂，重新理解概念的時候變得更容易。自我檢視的題目依照指引分 ABC...，概念有對應的題目可以讓我自己清楚知道我對於這個概念到底熟不熟懂不懂，如果有錯的比較多的段落，我就會回到指引重新檢視過對應的概念。
- s：有時候原文書的敘述會比較繁瑣，老師的講義像是重點整理一般將概念統整起來，尤其是題目編排的部分循序漸進，可以很快地檢視自己哪個概念不熟。

請針對小考或考前自評說明你的感受與看法

- s：小考考卷裡的題目都不會太難或很刁專 大部分都是在打基礎功，常常拿到考卷的時候錯的都是小地方或平常沒注意的細節。
- s：小考成績詳細公布各題得分可以快速看出自己哪種題型或單元不擅長，且老師會在錯題中圈出有問題的地方，有引導我重新思考錯誤的原因的作用，以及更快的理解如何改正錯誤。
- s：每次小考的考前自評，令我在小考前能夠有大致方向，更有效溫習範圍，而且有加分，令分數更可觀。
- s：考前自評可以檢視自己是否對觀念熟悉或檢查是否有缺漏複習的部分，再次審視學習內容。

7. 建議與省思 Recommendations and Reflections

要編輯一套合適的學習教材並不是一件容易的事情，而本次計畫所使用的教材事實上已經是第三個版本了。回顧整個製作編輯的過程，不僅需要大量收集學生過往學習情況的資訊，還要整理學生作答時經常發生的錯誤類型，而最後也是最重要的，在正式編寫時除了要特別注意文字內容的使用對學生而言是否足夠淺顯明白，對於步驟的拆解是否足夠讓學生可以逐步跟上也非常關鍵。

當我們完成了一份教材的開發，其實後續仍有許多重要工作，比如收集學生使用後的回饋意見、如何實際掌握學生使用教材的狀況、如何提升學生使用教材的動機，此外，在課堂上適時穿插跟教材有關的學習活動等等也非常重要。教材的內容與形式沒有最好，只有更好，唯有不斷更新以及修正才能持續提升及改善學生使用教材的效益。最後，感謝教學實踐計畫的推動，使得本計畫的構想得以實現。

二. 參考文獻 References

- 涂金堂 (2011)。運用「範例 (worked-out example)」在國小數學問題解決的教學實驗研究。國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系教育心理學報, 43 (1), 25-50。
- 涂金堂 (2012)。應用認知負荷理論的數學解題教學實驗。屏東教育大學學報-教育類, 38, 227-256。
- 許文清、吳慧敏、譚寧君、楊凱翔 (2013)。工作範例之教學順序對學生學習成效與認知負荷影響之研究--以面積覆蓋活動為例。科學教育月刊, 363, 2~19
- 黃一泓、虞翔 (2014)。不同範例與解題組合對初學者在學習上的影響。教育心理學報, 45(4), 497-515。
- 黃冠仁 (2005)。台灣地區大學生微積分學習態度的研究 (未出版之碩士論文)。交通大學, 新竹市。
- 楊嘉勝 (2011)。大一學生微積分學習策略與微積分學習成效之研究 (未出版之碩士論文)。國立交通大學, 新竹市。
- 李明德 (2015)。大一理工學生數學學習態度、作業態度和學習表現之研究。國立台灣師範大學數學系碩士論文。
- 劉湘川、白宗恩、鄭俊彥、黃玉臺、謝俊逸、陳建憲等 (2010)。微分基本公式之錯誤型。測驗統計年刊, 18, 35-49。doi:10.6773/JRMS.201012.0035
- 魏傳昇 (2018)。微積分迷思概念之研究—以「微分的應用」為例, 高等教育研究要, No.8, p1~15.
- Chang, K. E., Liu, S. H. & Chen, S. W. (1998). A testing system for diagnosing misconceptions in DC electric circuits. *Computers & Education*, 31(2), 195-210.
- Denbel, D. G. (2014). Students' misconceptions of the limit concept in a first calculus course. *Journal of Education and Practice*, 5(34), 24-40.
- Gilbert, J. K., & Watts, D. M. (1983). Concepts, misconceptions and alternative conceptions: Changing perspective in science education. *Studies in Science Education*, 10(1), 61-98.
- Hancock, C. H. (1940). An evaluation of certain popular science misconceptions. *Science Education*, 24(4), 208-213.
- Head, J. J. (1986). Research into alternative frameworks: promise and problems. *Research in Science & Technological Education*, 4(2), 203-211.
- Kalyuga, S., Ayres, P., Chandler, P., & Sweller, J. (2003). Expertise reversal effect. *Educational Psychologist*, 38, 23-31.
- Seah, E. K. (2005). Analysis of students' difficulties in solving integration. *The Mathematics Educator*, 9(1), 39-59.
- Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: effects on learning. *Cognitive Science*, 12, 257-285.
- Sweller, J. (2010). Element interactivity and intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Educational Psychology Review*, 22, 123-138.
- Tall, D. (1993). *Students' Difficulties in Calculus*. Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME-7, Québec, Canada: 13-28.
- Wandersee, J. H., Mintzes, J. J., & Novak, J. D. (1994). Research on alternative conceptions in science. In D. L. Gabel (Eds.), *Handbook of research on science teaching and learning* (pp. 177-210). New York: Simon & Schuster and Prentice Hall International.

三. 附件 Appendix

微積分學習指引 3.6 鏈鎖律 (The Chain Rule)

A. 了解鏈鎖律(The Chain Rule)的使用方式

說明: 已知合成函數 $F(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$ ，則對此函數 $F(x) = f(g(x))$ 微分時，須使用**鏈鎖律**，公式如下

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

共有三個步驟，分別為

第一步驟：將**外面**的函數 $f(\quad)$ 微分得到 $f'(\quad)$ 。例如 $F(x) = \sin(x^2)$ 的第一步驟是對外面的 $\sin(\quad)$ 微分得到 $\cos(\quad)$ 。

第二步驟：將**裡面**的函數 $g(x)$ 原封不動放進第一步驟中的 $f'(\quad)$ 內。例如，銜接上面的例子，把 x^2 放進 $\cos(\quad)$ 裡，得到 $\cos(x^2)$ 。

第三步驟：再將函數 $g(x)$ **微分**得 $g'(x)$ 後，**乘**在最後。例如，承上面的例子，對 x^2 微分得 $2x$ 並**乘**在最後，得到 $F'(x) = \cos(x^2)(2x)$ 。

常見錯誤: 同學常犯的錯誤有以下兩種，皆為遺漏上述步驟的其中一項，情況如下所示

錯誤一: $F'(x) = f'(g(x))$ 。忘記乘上裡面 $g(x)$ 的微分。例如，將上述的例子寫成 $F'(x) = \cos(x^2)$ 。

錯誤二: $F'(x) = f'(g'(x))$ 。忘記第二步驟，卻將第三步驟的 $g'(x)$ 放進 $f'(\quad)$ 內。例如，將上述的例子寫成 $F'(x) = \cos(2x)$ 。

除此之外，**鏈鎖律**有另一種表示方式，是數學家**萊布尼茲(Leibniz)**採用的符號，情況如下：

令 $y = F(x) = f(g(x))$ 及 $u = g(x)$ 則可得 $y = f(u)$ ，因此，我們可將**導函數** $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{dy}{dx}$ 以如下形式表示

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \text{ 其中 } \frac{dy}{du} = f'(u) = f'(g(x)) \text{ 而 } \frac{du}{dx} = g'(x).$$

微積分學習指引 5.6 Substitution and Area Between Curves

A. 了解 u -代換法 (u -substitution)在定積分上的使用：

說明: (1)前面的章節我們已學過使用 u -代換法的技巧處理**不定積分**的問題，例如：令 $u = x^2 + 1$ ，可得下列結果，

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{u} \left(\frac{du}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

此時，若將上述的**不定積分**問題轉換成**定積分**的 $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$ 時，便可直接利用**微積分基本定理第二部份**得出以下結果，

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2.$$

(2)上述的計算方式是把求**反導函數**的步驟與計算**定積分**的過程分開處理，現在我們來考慮將上述方法合併成一個做法來處理：

步驟一:先令 $u = x^2 + 1$ 得 $du = 2x dx$ 。

步驟二:轉換積分的上下限，當 $x=0$ 時，得 $u=1$ ；當 $x=1$ 時，得 $u=2$ (**注意:**此步驟很容易忘記)

步驟三:將原來變數為 x 的定積分轉換成變數為 u 的定積分，即 $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \int_1^2 \frac{1}{u} \left(\frac{du}{2} \right)$ 。

步驟四:計算變數為 u 的定積分 $\int_1^2 \frac{1}{u} \left(\frac{du}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln|u| \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2$ (**注意:**此步驟勿將變數 u 變回 x)