

延遲差異限制多播樹問題之近似解之複雜度

許丕榮

國立雲林科技大學電機工程系
sheupr@flame.yuntech.edu.tw

陳善泰

國立雲林科技大學電機工程系
g8612722@ping.yuntech.edu.tw

摘要

在本篇論文，我們所要研究的主題是如何在多播通訊點對點延遲限制下，和目的節點之間的傳輸延遲差異限制下來建立一個多播樹。也就是說，給定一個電腦網路，一個起始節點及一組多播目的節點，如何找到一個多播樹，它以起始節點為根節點而以多播目的節點為樹葉，使得起始節點到每一個目的節點之點對點延遲在一個可容許的範圍內，並且目的節點之間的延遲差異亦在一個可容許的範圍內。這個問題是首先被[2]所定義和討論，他們稱這個問題為延遲和延遲差異限制多播樹問題。他們證明這是一 NP-完全性問題。然而，我們從他們的證明過程中發現即使不考慮點對點延遲限制，那麼單在延遲差異限制下來建立多播樹依然是一 NP-完全性問題。因此，在本篇論文中，我們將僅討論延遲差異限制多播樹問題。進一步的，我們發現要求得延遲差異限制多播樹問題的常數倍近似解是一個 NP-hard 問題。當我們把這個問題從一般網路搬到單一延遲網路（即網路上每一個鏈結的延遲均為 1）來考慮時，我們發現結果是一樣的，也就是說，單一延遲網路之延遲差異限制多播樹問題是一 NP-完全性問題，而它的常數倍近似解是一個 NP-hard 問題。

關鍵詞：多播樹、複雜度、近似解、NP-完全性、NP-hard

1. 導論

在本篇論文，我們所要研究的主題是如何在多播通訊點對點延遲限制下[3]，和目的節點之間的傳輸延遲差異限制下來建立一個多播樹[2]。也就是說，給定一個電腦網路，一個起始節點及一組多播目的節點，如何找到一個多播樹，它以起始節點為根節點而以多播目的節點為樹葉，使得起始節點到每一個目的節點之點對點延遲在一個可容許的範圍內，並且目的節點之間的延遲差異亦在一個可容許的範圍內。例如 1 所示之例子，起始節點 v_s 到目的節點 v_1 有兩條路徑，其延遲分別為 16 和 21。起始節點 v_s 到目的節點 v_2 有兩條路徑，其延遲分別為 19 和 10。若只考慮點對點延遲限制（在此假設為 19），而不考慮延遲差異限制， v_s 到 v_1 應該選擇延遲為 16 的那一條路徑，而 v_s 到 v_2 可以選擇延遲為 10 或 19 的那一條路徑。事實上，在這種情況下，我們可以在多項式時間內建立一個最佳化的多播樹，因為只要我們在起始節點和每一個多播目的節點之間建立一條最小延遲路徑（可以利用 Dijkstra 演算法求得），然後由這些路徑所形成的多播樹就是一個點對點延遲最佳化的多播樹。

若只考慮延遲差異限制（在此假設為 3），而不考慮點對點延遲限制，則 v_s 到 v_1 可以選擇延遲為 16 或 21 的那一條路徑，而 v_s 到 v_2 應該選擇延遲為 19 的那一條路徑。最後，若同時考慮點對點延遲限制（假設為 19）和延遲差異限制（假設為 3），則 v_s 到 v_1 應該選擇延遲為 16 的那一條路徑，而 v_s 到 v_2 應該選擇延遲為 19 的那一條路徑。

如何在多播通訊點對點延遲限制下，和目的節點之間的傳輸延遲差異限制下來建立一個多播樹的問題是首先被[2]所定義和討論，他們稱這個問題為延遲和延遲差異限制多播樹問題。他們證明這是一個 NP-完全性問題。然而，我們從他們的證明過程中發現即使不考慮點對點延遲限制，那麼單在延遲差異限制下來建立多播樹依然是一個 NP-完全性問題。因此，在本篇論文中，我們將僅討論延遲差異限制多播樹問題。進一步的，我們發現要求得延遲差異限制多播樹問題的常數倍近似解

也是一個 NP-hard 問題。

當我們把這個問題從一般網路搬到單一延遲網路（即網路上每一個鏈結的延遲均為 1）來考慮時，我們發現結果是一樣的，也就是說，單一延遲網路之延遲差異限制多播樹問題是一個 NP-完全性問題，而它的常數倍近似解是一個 NP-hard 問題。

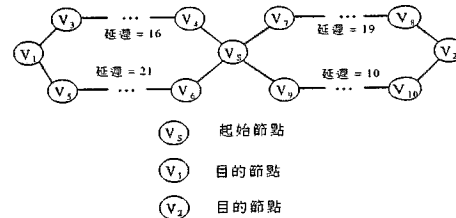


圖 1. 點對點延遲限制和延遲差異限制

本篇論文其他部分的組織安排如下：在第二節，我們定義和描述所謂延遲差異限制多播樹問題。在第三節，我們提供不同於[2]的另外一個證明來證明延遲差異限制多播樹問題是 NP-完全性問題。進一步地，我們證明延遲差異限制多播樹問題之常數倍近似解是 NP-hard 問題。在第四節，我們證明，在單一延遲網路上，延遲差異限制多播樹問題是 NP-完全性問題而其常數倍近似解是 NP-hard 問題。最後，在第五節，我們給了一些結論並建議一些未來可能的研究方向。

2. 延遲差異限制多播樹問題之定義

我們將以一個權值有向圖 $G = (V, E)$ 來表示一個電腦網路，其中的節點集合 V 代表電腦網路上的工作站或路徑器，邊集合 E 代表節點與節點之間的鏈結(Link)。 $n = |V|$ 表示網路上所有節點的總數。對於 E ，我們定義一個連結延遲函數(Link-delay Function) $D: \ell \rightarrow \mathbb{R}^+$ ，它給予圖上每一個連結 $\ell \in E$ 一個非負的數值 $D(\ell)$ ，代表著資料在這個鏈結 ℓ 上傳輸時所需要經歷的延遲。

在多播通訊中，一筆資料將由電腦網路上的某一個起始節點 $v_s \in V$ 送出，然後經過一些其他節點，最後到達

一組目的節點 $M \subseteq V - \{v_s\}$ ，此處集合 M 稱為多播通訊之目的節點集合或簡稱目的節點集合，它的大小為 $m = |M|$ ， M 內的每一個節點稱為一個目的節點。要被多播傳送的資料則沿著一個多播樹 $T = (V_T, E_T)$ 傳送到 M 的每一個目的節點。多播樹 T 是一個連接起始節點與目的節點集合的擴張樹 (Spanning Tree)，也就是說，所有目的節點與起始節點構成 T 的樹葉，另外 T 可以包含 G 中不屬於目的節點集合 M 和起始節點 v_s 的其它節點當作轉送節點。我們也定義 $Pr(v_s, u_s)$ 為在這個多播樹 T 中由起始節點 v_s 到某一個目的節點 $v_s \in M$ 的路徑。很明顯地，當一筆資料經由這個路徑傳輸時，它所需要經歷的延遲為 $\sum_{\ell \in Pr(v_s, v_w)} D(\ell)$ 。

接下來我們介紹目的節點之間延遲差異的最大容忍上限值 δ ，這個參數代表目的節點間最大點對點延遲與最小點對點延遲之差異必須保持在 δ 之內。設定這個參數的目的主要是希望所有的目的節點對同一筆資料能盡可能的在同一時間內接收到。根據這些符號和定義，我們現在可以正式的來描述本論文所要討論的問題 **延遲差異限制多播樹問題**：給定一個網路 $G = (V, E)$ ，一個起始節點 $v_s \in V$ ，一個目的節點集合 $M \subseteq V - \{v_s\}$ ，一個連結延遲函數 $D: \ell \rightarrow r^+$ ， $\ell \in E$ ，和延遲差異限制值 δ ，請問是否存在一個多播樹 $T = (V_T, E_T)$ 從 v_s 到 M ，使得它的目的節點之間延遲差異 $\delta_T \leq \delta$ ，即

$$\delta_T = \max_{v_u, v_w \in M} \left\{ \sum_{\ell \in Pr(v_s, v_u)} D(\ell) - \sum_{\ell \in Pr(v_s, v_w)} D(\ell) \right\} \leq \delta.$$

為了底下討論近似解方便起見，在此我們定義延遲差異限制多播樹問題之最佳化版本(我們稱為延遲差異最小多播樹問題)為尋找一個多播樹 $T^* = (V_T^*, E_T^*)$ 從 v_s 到 M ，使得它的目的節點之間延遲差異 δ_{T^*} 為最小值，即

$$\delta_{T^*} = \min_T \left\{ \max_{v_u, v_w \in M} \left\{ \sum_{\ell \in Pr(v_s, v_u)} D(\ell) - \sum_{\ell \in Pr(v_s, v_w)} D(\ell) \right\} \right\} = \min_T \{\delta_T\}$$

其中 T 為任何連接 v_s 到 M 之多播樹。

3. 延遲差異限制多播樹問題之複雜度與其近似之複雜度

3.1 延遲差異限制多播樹問題之複雜度

延遲差異限制多播樹問題和延遲和延遲差異限制多播樹問題在 [2] 中已經被證明是一個 NP-完全性問題。在本節裡，為了一致性起見(即本論文所有的證明皆採用 Hamiltonian Circuit 來作轉換)，我們提供另一個證明來證明延遲差異限制多播樹問題是一個 NP-完全性問題。

定理 1：延遲差異限制多播樹問題是一個 NP-完全性問題。

證明：首先我們可以很容易的看出來延遲差異限制多播樹問題是一個屬於 NP 等級的問題。接下來我們將把一個已知的 NP-完全性問題(我們將挑選 Hamiltonian Circuit 問題 [1]) 轉換為延遲差異限制多播樹問題。**Hamiltonian Circuit 問題**：給定一個圖形 $G = (V, E)$ ，試問 G 是否包含一個 Hamiltonian Circuit？即是否存在一個迴圈(Cycle)，使得從其中一個節點出發，然後經過 G 中每一個節點剛好一次，最後可再回到原出發節

點？

我們現在描述如何把一個給定 Hamiltonian Circuit 問題 $G = (V, E)$ ， $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ， $n = |V|$ ，轉換成延遲差異限制多播樹問題。根據 $G = (V, E)$ 我們造出 $G' = (V', E')$ ，其中 $V' = \{v_1', v_2', \dots, v_n' \} \cup \{v_s, v_{d_1}, v_{d_2}, v_1''\}$ ， $E' = \{(v_i', v_j') | (v_i, v_j) \in E, 1 \leq i, j \leq n\} \cup \{(v_s, v_{d_1}'), (v_s, v_1'), (v_1', v_{d_2}')\} \cup \{(v_1'', v_i') | (v_1, v_i) \in E, 2 \leq i \leq n\}$ ，起始節點為 v_s' ，目的節點集合為 $M = \{v_{d_1}', v_{d_2}'\}$ ，除了鏈結 (v_s', v_{d_1}') 的延遲為 $n + 2$ 之外，其餘每一條鏈結的延遲皆為 1，延遲差異限制值 $\delta = 0$ 。我們可以很容易的看出如此的轉換可以在多項式時間內完成。

現在我們證明假如 $G = (V, E)$ 中存在有一個 Hamiltonian Circuit，則 $G' = (V', E')$ 就存在有一個多播樹 $T' = (V_T', E_T')$ ，由起始節點 v_s' 到目的節點集合 $M = \{v_{d_1}', v_{d_2}'\}$ ，其 $\delta_{T'}$ 小於或等於 $\delta = 0$ 。明顯地，在 G' 中，從 v_s' 到 v_{d_1}' 只有一條路徑且其傳輸延遲

為 $n + 2$ 。因為 $\delta = 0$ ，所以由 v_s' 到 v_{d_2}' 也必須存在有一條延遲為 $n + 2$ 的路徑，如此多播樹 T' 其 $\delta_{T'} = 0$ 才存在。假設 G 中存在有一個 Hamiltonian Circuit， $(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)})$ ，此處 π 為一個排列函數，則 G' 中的

$(v_s, v_1 = v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}, \dots, v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(i-1)}, v_1)$ 將為 v_s 到 v_{d_2}' 的一條延遲為 $n + 2$ 的路徑，注意，

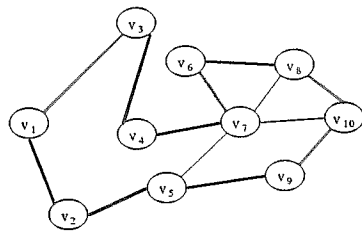
因為 $(v_{\pi(i-1)}, v_{\pi(i)} = v_1) \in E$ (因為 $v_1 = v_{\pi(i)}$) 所以 $(v_{\pi(i-1)}, v_1) \in E$ ，這是因為在 G' 的建構過程中，假如 $(v_1, v_i) \in E$ ，則 $(v_1, v_i) \in E$ ， $2 \leq i \leq n$ 。

上述這兩條由 v_s' 到 v_{d_1}' 和 v_s' 到 v_{d_2}' 的路徑便構成了滿足延遲差異限制 $\delta = 0$ 要求的多播樹 T' 。所以假如 G 中有 Hamiltonian Circuit，則 G' 中便存在一多播樹 T' 其中 $\delta_{T'} = 0$ 。

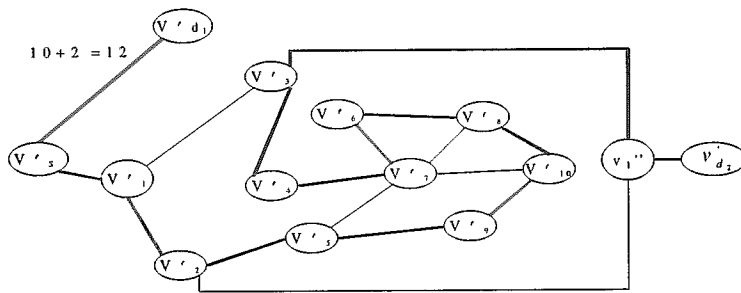
接著我們證明假如在 $G' = (V', E')$ 中存在有一個多播樹 $T' = (V_T', E_T')$ ，由起始節點 v_s' 到目的節點集合 $M = \{v_{d_1}', v_{d_2}'\}$ ，其 $\delta_{T'} \leq 0$ ，則在 $G = (V, E)$ 中就存在有 Hamiltonian Circuit。由 $G' = (V', E')$ 的結構可知，如果在 G' 中存在有這樣的一個多播樹 T' ，則 T' 必須包含 v_s' 到 v_{d_1}' 之唯一的一條延遲為 $n + 2$ 的路徑和 v_s' 到 v_{d_2}' 一條延遲為 $n + 2$ 的路徑，才能滿足延遲差異 $\delta_{T'} \leq 0$ 的要求。因為 G' 中除了鏈結 (v_s', v_{d_1}') 之延遲為 $n + 2$ 之外，其餘鏈結之延遲皆為 1，所以由 v_s' 到 v_{d_2}' 的延遲

為 $n+2$ 之路徑，除了包含 v_s 和 v_{d_2} 之外，必須再包含 $n+1$ 個其它的節點，即 $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ 都必須被包含。假設 $(v_s, v_1 = v_{\pi'(i)}, v_{\pi'(i-1)}, \dots, v_{\pi'(n)}, v_{\pi'(1)}, \dots, v_{\pi'(i-1)}, v_1, v_{d_2})$ ，此處 π' 為一個排列函數，為如此的一條路徑，則 $(v_{\pi'(1)}, v_{\pi'(2)}, \dots, v_{\pi'(n)})$ 將構成 G 中的一個

Hamiltonian Circuit。注意，因為 $(v_{\pi'(i-1)}, v_1) \in E'$ ，所以 $(v_{\pi'(i-1)}, v_{\pi'(i)} = v_1) \in E$ ，這是因為在 G' 的建構過程中，假如 $(v_1, v_i) \in E$ 則 $(v_1'', v_i) \in E'$ ， $2 \leq i \leq n$ 。所以假如 G' 中存在有多播樹 T' 其 $\delta_{T'} \leq 0$ ，則 G 中存在有 Hamiltonian Circuit。以上證明了延遲差異限制多播樹問題是一個 NP-完全性問題。■



(a) $G = (V, E)$



(b) $G' = (V', E')$

圖 2、定理 1 之例子

讓我們以一個例子來說明定理 1 的證明。圖 2(a) 所示為一個 $G = (V, E)$ ，其中 $n = |V| = 10$ 。根據定理 1 之轉換方法，我們可以得到圖 2(b) 之 $G' = (V', E')$ 。在 G' 中，除 v_s 到 v_{d_1} 之鏈結的延遲為 $n+2=12$ 外，其餘之鏈結的延遲為 1。圖 2(a) 中之粗線部分為 G 之 Hamiltonian Circuit，而圖 2(b) 中之粗線部分為 G' 之多播樹 T' 其 $\delta_{T'} = 0$ 。

3.2 延遲差異最小多播樹問題之近似解之複雜度
在這一小節裡，我們將要討論延遲差異最小多播樹之常數 ($\epsilon > 1$) 倍近似解的問題。限於篇幅，有關 NP-完全性問題的近似解的相關定義與知識，請參閱 [1]。

當一個 NP-完全性問題的最佳化版本 P (在本論文中，最佳化即為最小化，而非最大化) 有一個常數倍近似解時，是指說存在有一個 ϵ 倍的近似演算法 A，它對於 P 的每一個實例 I 皆能產生一個可行解 $S_A(I)$ 使得

$$\frac{S_A(I)}{S_*(I)} \leq \epsilon, \text{ 此處 } S_*(I) \text{ 為實例 } I \text{ 的最佳解。在底下，}$$

我們將證明就延遲差異最小多播樹問題而言，如此的近似演算法本身就是可解得最佳解的最佳演算法。因此除非 $NP=P$ ，否則延遲差異最小多播樹問題並不存在任何多項式時間的 ϵ 倍的近似演算法。

定理 2：延遲差異最小多播樹之常數倍 (ϵ) 近似解問題是一個 NP-hard 問題。

證明：我們將把一個已知的 NP-完全性問題 (我們將挑選 Hamiltonian Circuit 問題) 轉換為延遲差異最小多播樹之常數倍近似解問題。

我們現在描述如何把一個給定 Hamiltonian Circuit 問題 $G = (V, E)$ ， $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ， $n = |V|$ ，轉換為延遲差異最小多播樹之常數倍近似解問題。根據 $G = (V, E)$ ，我們造出 $G' = (V', E')$ ，其中 $V' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\} \cup \{v_s', v_r', v_{d_1}', v_{d_2}', v_1''\}$ ， $E' = \{(v_i', v_j') | (v_i, v_j) \in E, 1 \leq i, j \leq n\} \cup \{(v_s', v_r'), (v_r', v_{d_1}'), (v_s', v_1''), (v_1'', v_{d_2}')\} \cup \{(v_1'', v_i') | (v_1, v_i) \in E, 2 \leq i \leq n\}$ ，起始節點為 v_s' ，目的節點集合為 $M = \{v_{d_1}', v_{d_2}'\}$ ，鏈結 (v_r', v_{d_1}') 的延遲為 $\frac{1}{\epsilon}$ ，鏈結 (v_s', v_r') 的延遲為 $n+2$ ，而所有其他鏈結

的延遲皆為 1，常數 ϵ 。我們可以很容易的看出如此的轉換可以在多項式時間內完成。

現在我們證明假如 G 中存在有一個 Hamiltonian Circuit，則延遲差異最小多播樹問題之 ϵ 倍之近似演算法 A 在 G' 中就能找到一個最佳多播樹 T^* ，由起始節點 v_s' 到目的節點集合 $M = \{v_{d_1}', v_{d_2}'\}$ 。很明顯地，在 G'

的延遲皆為 1，常數 ϵ 。我們可以很容易的看出如此的轉換可以在多項式時間內完成。

現在我們證明假如 G 中存在有一個 Hamiltonian Circuit，則延遲差異最小多播樹問題之 ϵ 倍之近似演算法 A 在 G' 中就能找到一個最佳多播樹 T^* ，由起始節點 v_s' 到目的節點集合 $M = \{v_{d_1}', v_{d_2}'\}$ 。很明顯地，在 G'

中由 v_s 到 v_{d_1} 的唯一路徑為 (v_s, v_r, v_{d_1}) 其延遲為 $n+2+\frac{1}{\epsilon}$ 。假如 $(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)})$ 為 G 中之 Hamiltonian Circuit，此處 π 為一排列函數，則 $(v_s, v_1 = v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(i-1)}, v_1, v_{d_2})$ 將為 G' 中 v_s 到 v_{d_2} 的一條延遲為 $n+2$ 的路徑(理由同定理一)。由上述 v_s 到 v_{d_1} 和 v_s 到 v_{d_2} 的這兩條路徑所構成之多播樹必為最佳多播樹 T^* 其 $\delta_{T^*} = \left(n+2+\frac{1}{\epsilon}\right) - (n+2) = \frac{1}{\epsilon}$ 。因為 v_s 到 v_{d_2} 之其它路徑的延遲將是 $\leq n+1$ ，所以它們之中的任何一條路徑與 v_s 到 v_{d_2} 之唯一路徑所構成之多播樹 \bar{T} 之

$\delta_{\bar{T}} \geq 1 + \frac{1}{\epsilon} \geq \delta_{T^*}$ 。很明顯地在這種情況下， ϵ -倍之近似演算法 A 所能找到的唯一多播樹 T_A 將就是最佳多播樹 T^* ，因為 $\frac{\delta_{T_A}}{\delta_{T^*}} = \frac{\delta_{T^*}}{\delta_{T^*}} = 1 \leq \epsilon$ 。否則的話

$$\frac{\delta_{T_A}}{\delta_{T^*}} = \frac{\delta_{\bar{T}}}{\delta_{T^*}} \geq \frac{1 + \frac{1}{\epsilon}}{\frac{1}{\epsilon}} \geq 1 + \epsilon > \epsilon$$

將是矛盾。所以

假如 G 中存在有 Hamiltonian Circuit，則 ϵ -倍之近似演算法 A 在 G' 中就能找到一個最佳多播樹 T^* 。

接下來我們證明假如存在一個 ϵ -倍的近似演算法 A，它在 $G' = (V', E')$ 上，可以找到一個多播樹 $T_A = (V_T, E_T)$ ，由起始節點 v_s 到目的節點集合 $M = \{v_{d_1}, v_{d_2}\}$ ，

其延遲差異 δ_{T_A} ，滿足 $\frac{\delta_{T_A}}{\delta_{T^*}} \leq \epsilon$ 時 (T^* 為 G' 的延遲

差異最小多播樹)，則在 G 中存在有 Hamiltonian

Circuit。由 G' 的結構可知 T_A 一定包含 v_s 到 v_{d_1} 之唯一的一條延遲為 $n+2+\frac{1}{\epsilon}$ 的路徑 R_1 ，即

(v_s, v_r, v_{d_1}) 。因為 G' 中由 v_s 到 v_{d_2} 之所有路徑中，延遲最大者為延遲等於 $n+2$ 之路徑 R_2 (即 $v_s, v_{d_2}, v_1, v_1, v_2, \dots, v_n$ 皆經過一次)，而延遲次大者為延遲 $\leq n+1$ 之路徑 R_3 。很明顯地，延遲差異最小多播樹 T^* 必須包含 R_1 和 R_2 此二條路徑，使得

$$\delta_{T^*} = \left(n+2+\frac{1}{\epsilon}\right) - (n+2) = \frac{1}{\epsilon}$$

成之多播樹 \bar{T} 之 $\delta_{\bar{T}} \geq \left(n+2+\frac{1}{\epsilon}\right) - (n+1) = 1 + \frac{1}{\epsilon}$ 。假如 ϵ -倍之近

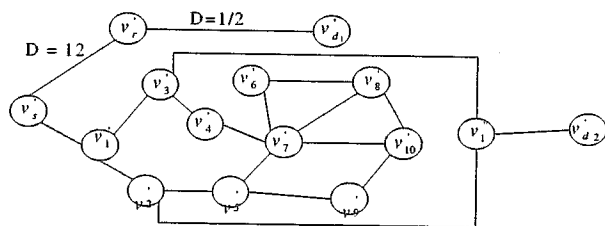
似演算法 A 所挑選的 v_s 到 v_{d_2} 之路徑其延遲不是為最大者，則

$$\frac{\delta_{T_A}}{\delta_{T^*}} \geq \frac{\left(n+2+\frac{1}{\epsilon}\right) - (n+1)}{\left(n+2+\frac{1}{\epsilon}\right) - (n+2)} = \frac{1 + \frac{1}{\epsilon}}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon + 1 > \epsilon$$

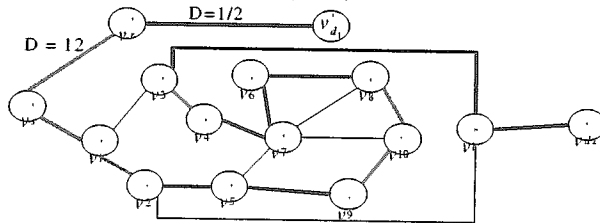
，將是矛盾。所以 ϵ -倍之近似解演算法 A 必定挑選 v_s 到 v_{d_2} 間延遲為 $n+2$ 之路徑，即路徑 $(v_s, v_1 = v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)}, v_1, v_{d_2})$ 它並不難

看出(理由同定理1) $(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)})$ 即為 G 中的一個 Hamiltonian Circuit。因此假如延遲差異最小多播樹問題存在有一個 ϵ -倍的近似演算法 A，則我們可以用近似演算法 A 來求得 G 中之 Hamiltonian Circuit。

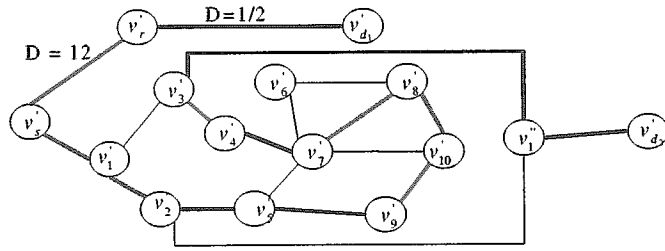
以上證明了延遲差異最小多播樹之常數倍近似解問題是一個 NP-hard 問題。



(a) $G' = (V', E')$



(b)



(c) 延遲差異限制多播路徑選擇問題次佳解

圖 3、定理二之例子

底下我們以一個例子來說明定理 2 的證明。根據定理 2 之轉換方法，我們可以由圖 2(a) 之 G 得到圖 3(a) 之 G' ，

假設 $\epsilon = 2$ 。 G' 中 v_s 到 v_r 的鏈結延遲是 $n+2=12$ ，而 v_s 到 v_{d_1} 的連結延遲是 $\frac{1}{\epsilon} = 1/2$ ，其餘的鏈結延遲皆為 1

單位延遲。圖 3(b) 中粗線為 G' 的最佳多播樹，其延遲差異是 $1/2$ ，圖 3(c) 中粗線為次佳多播樹，其延遲差異是 $3/2$ 。如果有一個近似演算法 A 可以解得最佳解的 2 倍之內 ($\epsilon = 2$) 的多播樹，則因為唯一在 2 倍誤差之內的解為最佳解，所以近似演算法 A 將求得最佳解，換句話說，A 將求得圖 2 (a) 之 Hamiltonian Circuit。

4. 單一延遲網路之延遲差異限制多播樹問題之雜度與近似解之複雜度

所謂的單一延遲網路是指網路的所有鏈結的延遲都是 1 單位延遲。在一些通訊協定中，例如 IP，是以這種方式計算來計算資料在網路中的傳輸時間。

在這一節，我們將證明單一延遲網路之延遲差異限制多播樹問題是一個 NP-完全性問題，進一步地，我們也證明單一延遲網路之延遲差異最小多播樹之常數倍近似解問題是一個 NP-hard 問題。

4.1. 單一延遲網路之延遲差異限制多播樹問題之複雜度

定理 3：單一延遲網路之延遲差異限制多播樹問題是一個 NP-完全性問題。

證明：首先我們可以很容易的看出來單一延遲網路之延遲差異限制多播樹問題是一個屬於 NP 等級的問題。接下來我們將把一個已知的 NP-完全性問題（我們將挑選 Hamiltonian Circuit 問題）轉換為單一延遲網路之延遲差異限制多播樹問題。

我們現在描述如何把一個給定 Hamiltonian Circuit 問題 $G = (V, E)$ ， $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ， $n = |V|$ ，轉換成單一延遲網路之延遲差異限制多播樹問題。根據

$\hat{G} = (V, E)$ 我們造出 $G' = (V', E')$ ， $V' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{v_s, v_{r_1}, v_{r_2}, \dots, v_{r_{n+1}}, v_{d_1}, v_{d_2}, v_1\}$ ，

$E' = \{(v_i, v_j) | (v_i, v_j) \in E, 1 \leq i \leq n\} \cup \{(v_s, v_{r_1}), (v_{r_1}, v_{r_2}), (v_{r_2}, v_{r_3}), \dots,$

$(v_{r_n}, v_{r_{n+1}}), (v_{r_{n+1}}, v_{d_1}), (v_s, v_1), (v_{d_2}, v_1)\} \cup \{(v_1, v_i) |$

$(v_1, v_i) \in E, 2 \leq i \leq n\}$ ，起始節點為 v_s ，目的

節點集合為 $M = \{v_{d_1}, v_{d_2}\}$ ， G' 中的每一個鏈結的延遲皆為 1（即單一延遲網路），延遲差異限制值 $\delta = 0$ 。我們可以很容易的看出如此的轉換可以在多項式時間內完成。

現在我們證明假如在 $G = (V, E)$ 中存在有一個 Hamiltonian Circuit，則在 $G' = (V', E')$ 中就存在有一個多播樹 $T' = (V_r', E_r')$ ，由起始節點 v_s 到目的節點集合 $M = \{v_{d_1}, v_{d_2}\}$ ，其 $\delta_{T'} \leq 0$ 。很明顯地，在 G'

中，從 v_s 到 v_{d_1} 只有一條路徑

$(v_s, v_{r_1}, v_{r_2}, \dots, v_{r_n}, v_{r_{n+1}}, v_{d_1})$ 其延遲為 $n+2$ 。

因為 $\delta \leq 0$ ，所以由 v_s 到 v_{d_2} 也必須存在有一條延遲為 $n+2$ 之路徑，如此多播樹 T' 其 $\delta_{T'} = 0$ 才存在。假設 G 中存在有一個 Hamiltonian Circuit，

$(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)})$ ，此處 π 為一個排列函數，則 G' 中的

$(v_s, v_1 = v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}, \dots, v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(i-1)}, v_1, v_{d_2})$ 將為 v_s 到 v_{d_2} 的一條延遲為 $n+2$ 的路徑，注意，

因為 $(v_{\pi(i-1)}, v_{\pi(i)} = v_1) \in E$ （因為 $v_1 = v_{\pi(i)}$ ）所以

$(v_{\pi(i-1)}, v_1) \in E$ ，這是因為在 G' 的建構過程中，假如 $(v_1, v_i) \in E$ ，則 $(v_1, v_i) \in E, 2 \leq i \leq n$ 。

上述這兩條由 v_s 到 v_{d_1} 和 v_s 到 v_{d_2} 的路徑便構成了滿足延遲差異限制 $\delta=0$ 要求的多播樹 T' 。所以假如 G 中有 Hamiltonian Circuit，則 G' 中便存在一多播樹 T' 其中 $\delta_{T'} = 0$ 。

接著我們證明假如在 $G' = (V', E')$ 中存在有一個多播樹 $T' = (V_r', E_r')$ ，由起始節點 v_s 到目的節點集合

$M = \{v_{d_1}, v_{d_2}\}$ ，其 $\delta_{T'} \leq 0$ ，則在 $G = (V, E)$ 中就存在有 Hamiltonian Circuit。由 $G' = (V', E')$ 的結構可知，

如果在 G' 中存在有這樣的一個多播樹 T' ，則 T' 必須包含 v_s 到 v_{d_1} 之唯一的一條延遲為 $n+2$ 的路徑

$(v_s, v_{r_1}, v_{r_2}, \dots, v_{r_n}, v_{r_{n+1}}, v_{d_1})$ 和 v_s 到 v_{d_2} 一條延遲為 $n+2$ 的路徑，才能滿足延遲差異 $\delta_{r_i} \leq 0$ 的要求。因為 G' 中的每一個鏈結之延遲皆為 1，所以由 v_s 到 v_{d_2} 的延遲為 $n+2$ 之路徑，除了包含 v_s 和 v_{d_2} 之外，必須再包含 $n+1$ 個其它的節點，即 $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ 都必須被包含。假設 $(v_s, v_1 = v_{\pi(i)}, v_{\pi(i-1)}, \dots, v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(i-1)}, v_1, v_{d_2})$ ，此處 π 為一個排列函數，為如此的一條路

徑，則 $(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)})$ 將構成 G 中的一個 Hamiltonian Circuit。注意，因為 $(v_{\pi(i-1)}, v_1) \in E'$ ，所以 $(v_{\pi(i-1)}, v_{\pi(i)} = v_1) \in E'$ ，這是因為在 G' 的建構過程中，假如 $(v_1, v_i) \in E$ 則 $(v_1, v_i) \in E'$ ， $2 \leq i \leq n$ 。所以假如 G' 中存在有多播樹 T' 其 $\delta_{r_i} \leq 0$ ，則 G 中存在有 Hamiltonian Circuit。以上證明了延遲差異限制多播樹問題是一個 NP-完全性問題。■

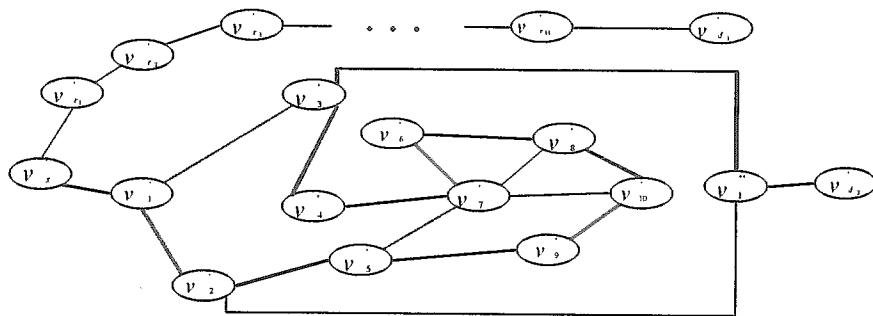


圖 4、定理 3 之例子

讓我們以一個例子來說明定理 3 的證明。圖 2(a) 所示為一個 $G = (V, E)$ ，其中 $n = |V| = 10$ 。根據定理 3 之轉換方法，我們可以得到圖 4 之 $G' = (V', E')$ 。在 G' 中，所有的鏈結的延遲皆為 1。圖 4 中之粗線部分為 G' 之多播樹 T' 其 $\delta_{r_i} = 0$ 。

4.2. 單一延遲網路之延遲差異最小多播之近似解問題之複雜度

定理 4：單一延遲網路之延遲差異最小多播樹之常數倍 (ϵ) 近似解問題為一個 NP-hard 問題。

證明：我們將把一個已知的 NP-完全性問題(在此我們挑選 Hamiltonian Circuit 問題)轉換為單一延遲網路之延遲差異限制多播樹問題之常數倍近似解。

我們現在把一個給定的 Hamiltonian Circuit 問題 $G = (V, E)$ ， $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ， $n = |V|$ ，轉換成為單一延遲網路之延遲差異限制多播樹問題之常數倍近似解的問題。根據 $G = (V, E)$ ，我們造出 $G' = (V', E')$ ，其中 $V' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{v_s, v_{r_1}, v_{r_2}, \dots, v_{r_{n+1}}, v_{r_{n+2}}, v_{d_1}, v_{d_2}, v_1\} \cup \{v_{r_{s,1-1}}, v_{r_{s,1-2}}, \dots, v_{r_{s,1-[\epsilon]-1}}\} \cup \{v_{r_{1,2-1}}, v_{r_{1,2-2}}, \dots, v_{r_{1,2-[\epsilon]-1}}\} \cup \dots \cup \{v_{r_{n,n+1-1}}, v_{r_{n,n+1-2}}, \dots, v_{r_{s,1-1}}\} \cup \{v_{r_{s,\eta-1}}, v_{r_{s,\eta-2}}, \dots, v_{r_{s,\eta-[\epsilon]-1}}\} \cup \{v_{r_{\eta,d_2-1}}, v_{r_{\eta,d_2-2}}, \dots, v_{r_{\eta,d_2-[\epsilon]-1}}\} \cup \{v_{r_{\eta,\nu_j-1}}, v_{r_{\eta,\nu_j-2}}, \dots, v_{r_{\eta,\nu_j-[\epsilon]-1}}\} | (v_i, v_j) \in E, 1 \leq i, j \leq n\} \cup \{v_{r_{\eta,\nu_j-1}}, v_{r_{\eta,\nu_j-2}}, \dots, v_{r_{\eta,\nu_j-[\epsilon]-1}}\} | (v_1, v_i) \in E, 2 \leq i \leq n\}$

$E' = \{(v_s, v_{r_{s,1-1}}), (v_{r_{s,1-1}}, v_{r_{s,1-2}}), \dots, (v_{r_{s,1-[\epsilon]-1}}, v_{r_{s,1-[\epsilon]}}$

$), (v_{r_{1,2-1}}, v_{r_{1,2-2}}), \dots, (v_{r_{1,2-[\epsilon]-1}}, v_{r_{1,2-[\epsilon]}}), \dots, (v_{r_{n,n+1-[\epsilon]-1}}, v_{r_{n,n+1}}), (v_{r_{n,n+1}}, v_{r_{n,n+2}}), \dots, (v_{r_{n,n+2}}, v_{d_1}), (v_s, v_{r_{s,\eta-1}}), (v_{r_{s,\eta-1}}, v_{r_{s,\eta-2}}), \dots, (v_{r_{s,\eta-[\epsilon]-1}}, v_1), (v_1, v_{r_{\eta,d_2-1}}), (v_{r_{\eta,d_2-1}}, v_{r_{\eta,d_2-2}}), \dots, (v_{r_{\eta,d_2-[\epsilon]-1}}, v_{d_2})\} \cup \{(v_1, v_{r_{\eta,\nu_i-1}}), (v_{r_{\eta,\nu_i-1}}, v_{r_{\eta,\nu_i-2}}), \dots, (v_{r_{\eta,\nu_i-[\epsilon]-1}}, v_{\nu_i}) | (v_1, v_i) \in E, 2 \leq i \leq n\} \cup \{(v_i, v_{r_{\eta,\nu_j-1}}), (v_{r_{\eta,\nu_j-1}}, v_{r_{\eta,\nu_j-2}}), \dots, (v_{r_{\eta,\nu_j-[\epsilon]-1}}, v_{\nu_j}) | (v_i, v_j) \in E, 1 \leq i \leq n\}$ 。

起始節點為 v_s ，目的節點集合為 $M = \{v_{d_1}, v_{d_2}\}$ ， G' 上每一個的鏈結延遲皆為 1 (即單一延遲網路)。簡單的說，在原來 $G = (V, E)$ 中的鏈結 (v_i, v_j) ，轉換成 G' 時皆在 v_i 與 v_j 之間插入 $[\epsilon] - 1$ 個節點 $v_{r_{\eta,\nu_j-1}}, v_{r_{\eta,\nu_j-2}}, \dots, v_{r_{\eta,\nu_j-[\epsilon]-1}}$ ，並且點與點之間的鏈結的延遲都是一個單位延遲，而原來 G 中之點與點之間的鏈結的延遲為 $[\epsilon]$ 。我們可以很容易看得出來，上述的轉換

過程可以在多項式時間內完成。

現在我們證明假如 G 中存在有一個 Hamiltonian Circuit, 則延遲差異最小多播樹問題之 ϵ -倍之近似演算法 A 在 G' 中就能找到一個最佳多播樹 T^* , 由起始節點 v_s 到目的節點集合 $M = \{v_{d_1}, v_{d_2}\}$ 。很明顯地, 在 G' 中 v_s 到 v_{d_1} 的唯一路徑為 $(v_s, \dots, v_r, \dots, v_{d_1})$ 其延遲為 $\lceil \epsilon \rceil (n+2) + 1$ 。假如 $(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)})$ 為 G 中之 Hamiltonian Circuit, 此處 π 為一排列函數, 則 $(v_s, \dots, v_1 = v_{\pi(i)}, \dots, v_{\pi(i+1)}, \dots, v_{\pi(n)}, \dots, v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(i-1)}, \dots, v_1, \dots, v_{d_2})$ 將為 G' 中 v_s 到 v_{d_2} 的一條延遲為 $\lceil \epsilon \rceil (n+2)$ 的路徑 (理由同定理一)。由上述 v_s 到 v_{d_1} 和 v_s 到 v_{d_2} 的這兩條路徑所構成之多播樹必為最佳多播樹 T^* 其 $\delta_{T^*} = \lceil \epsilon \rceil (n+2) + 1 - \lceil \epsilon \rceil (n+2) = 1$, 因為 v_s 到 v_{d_2} 之其它路徑的延遲將是 $\leq \lceil \epsilon \rceil (n+1)$, 所以它們之中的任一條路徑與 v_s 到 v_{d_2} 所構成之多播樹 \bar{T} 之 $\delta_{\bar{T}} \geq 1 + \lceil \epsilon \rceil$ 。很明顯地, 在這種情況下, 近似演算法 A 所能找到的唯一多播樹 T_A 將就是最佳多播樹 T^* ,

因為 $\frac{\delta_{T_A}}{\delta_{T^*}} = \frac{\delta_{T^*}}{\delta_{T^*}} = 1 \leq \epsilon$ 。否則的話

$$\frac{\delta_{T_A}}{\delta_{T^*}} = \frac{\delta_{\bar{T}}}{\delta_{T^*}} \geq \frac{1 + \lceil \epsilon \rceil}{1} \geq 1 + \lceil \epsilon \rceil > \epsilon, \text{ 將是矛盾。}$$

所以假如 G 中存在有 Hamiltonian Circuit, 可以被得到, 則近似演算法 A 在 G' 中就能找到一個最佳多播樹 T^* 。

接下來我們證明假如存在一個 ϵ -倍之近似演算法 A , 它在 $G' = (V', E')$ 上, 可以找到一個多播樹 $T'_A = (V', E')$, 由起始節點 v_s 到目的節點集合 $M = \{v_{d_1}, v_{d_2}\}$,

其延遲差異 $\delta'_{T'_A}$, 滿足 $\frac{\delta'_{T'_A}}{\delta_{T^*}} \leq \epsilon$ 時 (T^* 為 G' 的延

遲差異最小多播樹), 則在 G 中存在有 Hamiltonian Circuit。由 G' 的結構可知 T'_A 一定包含 v_s 到 v_{d_1} 之唯一的一條延遲為 $\lceil \epsilon \rceil (n+2) + 1$ 的路徑 R_1 , 即

$(v_s, \dots, v_r, \dots, v_{d_1})$ 。因為 G' 中由 v_s 到 v_{d_2} 之所有路徑中, 延遲最大者為 $\lceil \epsilon \rceil (n+2)$ 之路徑 R_2 (即 $v_s, v_{d_2}, v_1, v_1, v_2, \dots, v_n$ 皆經過一次), 而延遲次大者為延遲 $\leq \lceil \epsilon \rceil (n+1)$ 之路徑, 很明顯地, 延遲差異最小多播樹 T^* 必須包含 R_1 和 R_2 此二條路徑, 使得 $\delta_{T^*} = \lceil \epsilon \rceil (n+2) + 1 - \lceil \epsilon \rceil (n+2) = 1$, 因為由 R_1 和

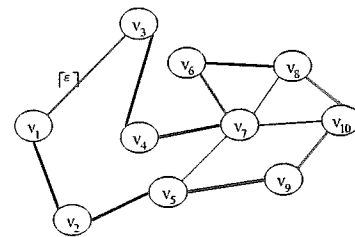
R_2 所構成之多播樹 \bar{T} 之 $\delta_{\bar{T}} \geq \lceil \epsilon \rceil (n+2) + 1 - \lceil \epsilon \rceil (n+1) = 1 + \lceil \epsilon \rceil$ 。假如

近似演算法 A 所挑選的 v_s 到 v_{d_2} 之路徑其延遲不是為最大者, 則 $\frac{\delta_{T_A}}{\delta_{T^*}} \geq \frac{1 + \lceil \epsilon \rceil}{1} = \lceil \epsilon \rceil + 1 > \epsilon$, 將是矛盾。

所以近似解演算法 A 必定挑選 v_s 到 v_{d_2} 間延遲為 $\lceil \epsilon \rceil (n+2)$ 之路徑, 即路徑 $(v_s, \dots, v_1 = v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)}, \dots, v_1, \dots, v_{d_2})$ 它並不難看出 $(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)})$ 即為 G 中的一個 Hamiltonian Circuit。

以上證明了延遲差異限制多播樹之常數倍近似解問題是一個 NP-hard 問題。■

我們以一個例子來說明定理 4。圖 5(b) 為使用定理 4 之轉由圖 5(a) $G=(V, E)$ 建造出來的, 圖 5(b) 中以虛線表示的鏈結實際上應該是含有 $\lceil \epsilon \rceil - 1$ 個節點, 並且每個鏈結之延遲為一個單位延遲。圖 5(c) 中之粗線為多播樹之最佳解, 其延遲差異是 1。而圖 5(d) 中之粗線為多播樹之次佳解, 其延遲差異是 $\lceil \epsilon \rceil + 1$ 。



(a) $G=(V, E)$, 所有鏈結之延遲指為 $\lceil \epsilon \rceil$

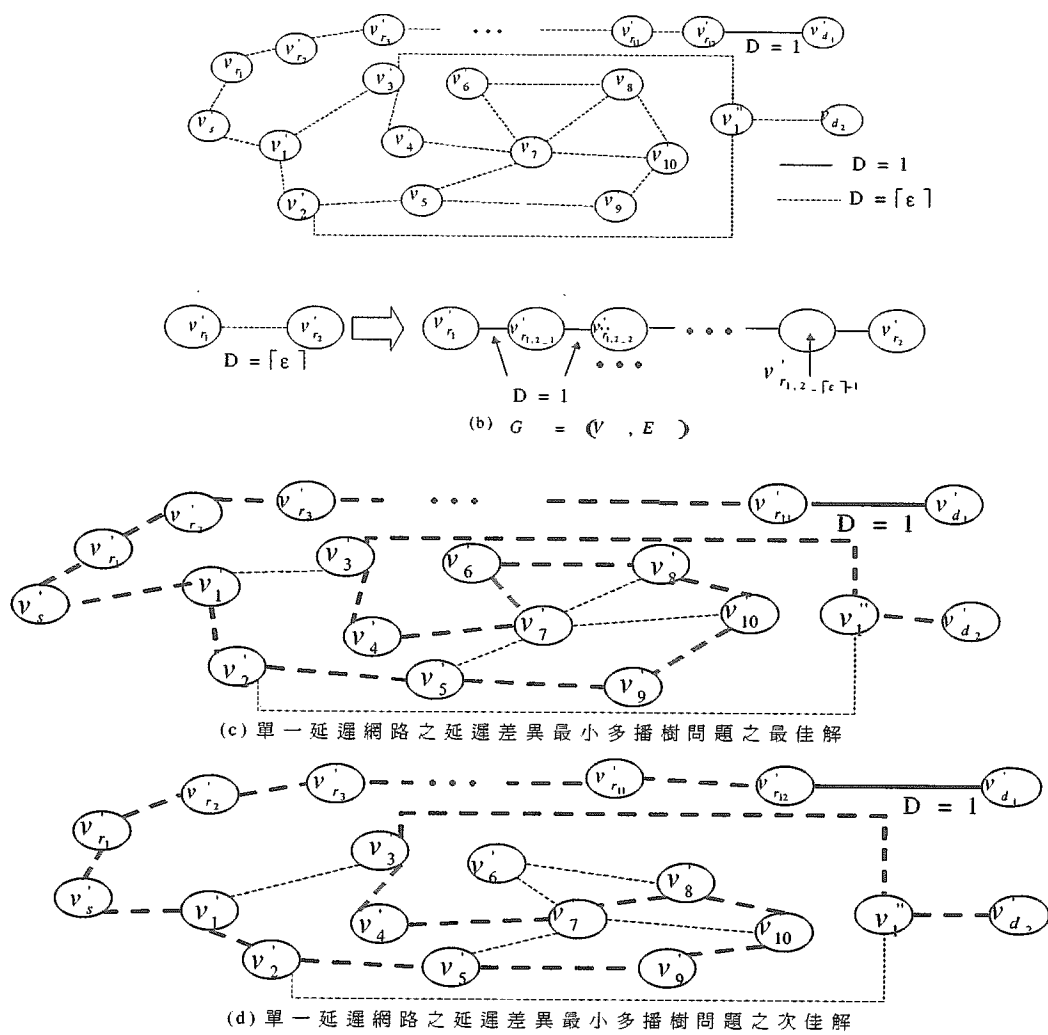


圖 5、定理 4 之說明

5. 結論

在本篇論文中，我們已經討論了延遲差異限制多播樹問題和它的最佳化版本：延遲差異最小多播樹問題。我們證明了下列三個結果：

定理 2：延遲差異最小多播樹之常數倍近似解問題是一個 NP-hard 問題。

定理 3：單一延遲網路之延遲差異限制多播樹問題是一個 NP-完全性問題。

定理 4：單一延遲網路之延遲差異限制多播樹問題之常數倍近似解為一個 NP-hard 問題。

關於定理 1，我們提供了另一個證明以便使得定理 1 到定理 4 的證明看起來較為一致。

我們未來的研究方向為探討延遲差異最小多播樹問題是否有其它型態的近似解（例如 $O(n)$ ）存在。

參考文獻

- [1] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, San Francisco: W. H. Freeman & Company, Publishers, 1979.
- [2] G. N. Rouskas and I. Baldine, "Multicast Routing with End-to-end Delay and Delay Variation Constraints," *IEEE Journal on Selection Areas in Communications*, vol. 15, no. 3, pp. 346-356, Apr. 1997.
- [3] Q. Sun and H. Langendörfer, "An Efficient Delay-constrained Multicast Routing Algorithm," *Journal of High Speed Networks*, vol. 7, pp. 43-55, 1998.

誌謝：本項研究工作經費接受國科會補助，計劃名稱：提供服務品質保證之無 ATM 網路系統研究；子計畫三-無線 ATM 網路系統中提供服務品質保證之多播連線管理 (I) 計劃編號：NSC 87-2219-E-224-001