

逢甲大學學生報告 ePaper

## Financial Time Series Analysis Final Report

探討波動結構性改變的時間序列

作者：吳貞霖、林留燕

系級：統精碩一

學號：M9800533、M9807163

開課老師：陳婉淑

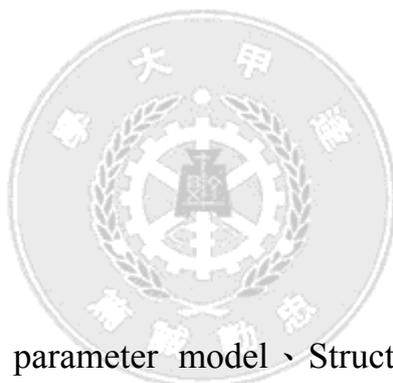
課程名稱：財務時間序列

開課系所：統計與精算研究所

開課學年：98 學年度 第一 學期

## 摘要

本報告探討 Amado and Teräsvirta (2008) 所提出的變異數隨著時間而有結構性變動(Structure breaks)的 GARCH 模型，即為 time-varying GARCH model (TV-GARCH)。我們應用四種 TV-GARCH 模型來模擬資料，並對這些資料配適一般常用的 GARCH 模型(general GARCH)：GARCH-t、EGARCH 及 GJR-GARCH 模型。由模擬分析發現，當時間序列有結構性改變時，若錯用了一般的 GARCH 模型會出現具有長記憶性(Long- memory)、高度持續性(high persistence)的現象，而使得估計參數近似不平穩。



**關鍵字：**Time-varying parameter model、Structural change、integrated GARCH effect、Conditional heteroskedasticity、資料模擬分析

# 目 次

1. Introduction .....	4
2. Model assumption and Data Simulation .....	5
2.1 Recommend of Model.....	5
2.2 Simulation .....	9
3. Model Fitting.....	14
4. Conclusion.....	18
References .....	19



## 圖表目錄

圖 1：轉換函數趨勢圖 .....	6
圖 2：DGP(1)各係數下之時間序列圖 .....	10
圖 3：DGP(2)各係數下之時間序列圖 .....	11
圖 4：DGP(3)各係數下之時間序列圖 .....	12
圖 5：DGP(4)各係數下之時間序列圖 .....	13
表 1：DGP(1) 模擬 100 組配適模型之估計平均值比較表 .....	14
表 2：DGP(2) 模擬 100 組配適模型之估計平均值比較表 .....	15
表 3：DGP(3) 模擬 100 組配適模型之估計平均值比較表 .....	16
表 4：DGP(4) 模擬 100 組配適模型之估計平均值比較表 .....	17



# 1. Introduction

Engle(1982)所提出的 ARCH 以及 Bollerslev (1986) 提出的 GARCH 模型能描述時間序列資料的波動叢聚特性，特別是短時間的波動變異；但是當變異會隨時間慢慢改變時，我們想了解原本的平穩假設條件是否顯得不恰當。在很多研究財務資料的實證研究中，都會有不符平穩條件的情形，對於這樣的資料，我們試著探討是否其不平穩的現象是來自於波動的結構性改變。

對於這種不符平穩性的 GARCH 模型，最近的相關研究有：Mikosch and Stărică (2004)提出的非條件變異數中的結構性改變，如果沒有將結構性改變適當的考慮在模式中會造成 Long-rang dependence 以及 IGARCH(integrated GARCH)特性。Baillie, Bollerslev and Millelsen (1996)提到 FIGARCH 模型 (Fractionally Integrated GARCH)以描述具有長記憶性的時間序列資料；而 Baillie and Morana (2007)隨後又用了在截距項有結構性改變的模型來涵蓋 FIGARCH 模型。另外，對於波動的變異具有高度持續性的資料，則假設波動的改變過程為平滑的(smoothly)，即改變過程為緩慢的改變而不是急劇變化。Dahlhaus and Subba Rao (2006)提出 time-varying ARCH model 來呈現這種波動的慢慢轉變。

而本報告引用 Amado and Teräsvirta (2008)中提到的 TV-GARCH 模型，即為 GARCH 隨時間有結構性轉變的模型，其介紹了包括相加模式以及相乘模式，我們對這兩種模式的 TV-GARCH 模型做資料模擬分析，使用其介紹的 DGP 來產生模擬資料，並配適 GARCH-t、EGARCH 及 GJR-GARCH 模型，來驗證在資料呈現變異數具有長記憶性或 IGARCH 效應時，可以用條件變異數有結構性改變的模型來描述。

## 2. Model assumption and Data Simulation

### 2.1 Recommend of Model

由 Amado and Teräsvirta (2008)提到的模型，其假設報酬為 $y_t$ ，殘差 $\varepsilon_t$ 的條件期望值假設為零，即 $\mu_t = 0$ ，條件變異數 $\sigma_t^2$ 會隨時間變動。模型如下：

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t | \Phi_{t-1} \sim N(\mu_t, \sigma_t^2) \\ \varepsilon_t &= \zeta_t \sigma_t, \quad \zeta_t \sim N(0, 1) \end{aligned} \quad (1)$$

相加的變異數隨時間變動模式(additive structure)如下：

$$\sigma_t^2 = h_t + g_t \quad (2)$$

相乘模式(multiplicative structure)則為：

$$\sigma_t^2 = h_t g_t \quad (3)$$

$g_t$ 為結構性改變項。 $h_t$ 為條件異質變異數，我們假設其服從標準GARCH(p,q)模型：

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \quad (4)$$

為了呈現條件變異數慢慢改變(smooth changes)的性質，由 $g_t$ 導入一個轉換函數 $G(t^*; \gamma; \mathbf{c})$  (transition function)，並定義 $g_t$ 如下：

$$g_t = (\alpha_0^* + \sum_{i=1}^q \alpha_i^* \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j^* h_{t-j}) G(t^*; \gamma; \mathbf{c}) \quad (5)$$

其中轉換函數為：

$$G(t^*; \gamma; \mathbf{c}) = \{1 + \exp[-\gamma \prod_{k=1}^K (t^* - c_k)]\}^{-1}, \quad \gamma > 0, c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_k.$$

轉換函數的參數包括斜率參數 $\gamma$ (smoothness parameter)、轉變點 $c_k$ (threshold parameter)、轉變點個數 $k$ 以及時間 $t^* = t/T$ ， $T$ 為觀察值個數。當 $\gamma$ 越大，斜率越大，轉換函數會使得模型變異數的改變越快速； $c_k$ 決定何時開始有結構性改變； $k$ 則決定函數的形狀，通常只用到 $k=1$  or  $k=2$ 。由圖 1 可以看出在不同參數下，轉換函數呈現的圖形。

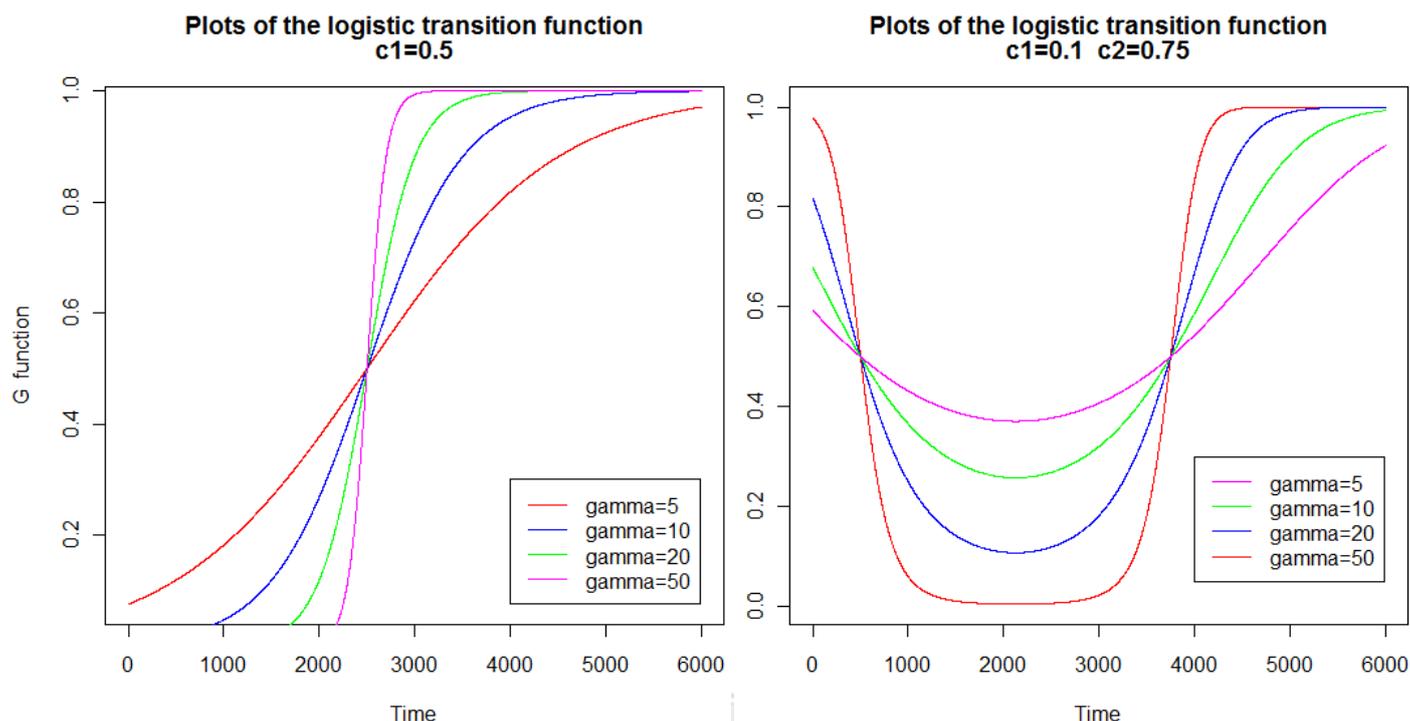


圖 1：轉換函數趨勢圖(a)  $c_1=0.5$  (b)  $c_1=0.1$   $c_2=0.75$

首先我們討論圖 1(a)，轉變點只有一個時，轉換函數只會發生一次的改變，且隨著時間點增加，轉換函數會從 0 開始越來越趨近於 1；此外在不同的斜率參數  $\gamma$  之下，轉換函數趨近於 1 的速度也不同，越小的  $\gamma$  參數呈現出的轉換函數圖形就越平緩，代表趨近於 1 的速度較慢。

若有兩個轉變點時，如圖 1(b)，轉換函數的起始點則是從 1 開始，發生了第一次轉變之後漸近於 0，但隨著時間點的增加又會發生第二次的轉變，因而再度回到趨近於 1。同樣的，在不同的斜率參數  $\gamma$  之下，轉換函數趨近於 1 的速度也不同，隨著  $\gamma$  參數的提升，轉換函數的圖形就越不平緩，代表趨近於 0 之後又趨近於 1 的速度較快。

一般 GARCH 模型加入  $G(t^*; \gamma; \mathbf{c})$  後就能表現波動的隨時間慢慢變異情形。而更一般化的模式如下：

$$g_t = \sum_{\ell=1}^r (\alpha_{0\ell} + \sum_{i=1}^q \alpha_{i\ell} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{j\ell} h_{t-j}) G_{\ell}(t^*; \gamma_{\ell}; \mathbf{c}_{\ell}) \quad (6)$$

(4)與(6)的參數恆正限制： $\alpha_i + \sum_{i=1}^q \alpha_{i\ell} > 0$ 、 $\beta_i + \sum_{i=1}^q \beta_{i\ell} > 0$ ， $i=0, \dots, q$ ， $j=0, \dots, p$ ，

$\ell=1, \dots, r$ 。這樣一般化的模式更能完整呈現各種波動的結構性改變，包括在條件變異數的部分或者非條件變異數(亦稱 baseline volatility)，但是因模式較為複雜，實際上在對資料建模時，Amado 和 Teräsvirta 提出只對 baseline volatility 或截距項設置轉換函數的模式，依然能表示結構性改變的性質，並且更易於操作，定義  $g_t$  如下：

$$g_t = \sum_{\ell=1}^r \alpha_{0\ell} G_{\ell}(t^*; \gamma_{\ell}; \mathbf{c}_{\ell}) \quad (7)$$

股票市場報酬波動的行為常有不平穩的表現，會不符合一般的 GARCH 模型假設：非條件變異數為常數，即  $E(\varepsilon_t^2) = \alpha_0 / (1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j)$ ，且  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$ 。以(2)、(4)及(7)式，可以表示一個截距項有結構性改變的 additive TV-GARCH，使得條件變異數能呈現結構性改變，並且放寬非條件變異數的限制，這樣的模型能較合適的來描述股票報酬的波動行為。

另外 Amado 和 Teräsvirt 對於 multiplicative TV-GARCH 則是定義  $\alpha_{0\ell} = \alpha_0 \delta_{\ell}$ 、 $\alpha_{i\ell} = \alpha_i \delta_{\ell}$ 、 $\beta_{j\ell} = \beta_j \delta_{\ell}$ ， $i=0, \dots, q$ ， $j=0, \dots, p$ ， $\delta_{\ell} > 0$ ， $\ell=1, \dots, r$ ，

$$g_t = 1 + \sum_{\ell=1}^r \delta_{\ell} G_{\ell}(t^*; \gamma_{\ell}; \mathbf{c}_{\ell}) \quad (8)$$

以下四種 DGP，為 Amado 和 Teräsvirt 提出的 TV-GARCH 模型，包括相加模式以及相乘模式：

**DGP(1)** 
$$h_t = 0.1 + (0.1 + \alpha_{11} G_1(t^*; \gamma_1; \mathbf{c}_1)) \varepsilon_{t-1}^2 + 0.8 h_{t-1}$$
  

$$\alpha_{11} = \{0.05, 0.09\} \quad , \quad \gamma_1 = \{5, 10\}$$

**DGP(2)**

$$h_t = (0.1 + \alpha_{01} G_1(t^*; \gamma_1; \mathbf{c}_1)) + (0.1 + \alpha_{11} G_1(t^*; \gamma_1; \mathbf{c}_1)) \varepsilon_{t-1}^2 + 0.8 h_{t-1}$$

$$\alpha_{01} = \{0.1, 0.3\} \quad , \quad \alpha_{11} = \{0.05, 0.09\} \quad , \quad \gamma_1 = \{5, 10\}$$

**DGP(3)** 
$$h_t = 0.1 + 0.1 \varepsilon_{t-1}^2 + (0.8 + \beta_{11} G_1(t^*; \gamma_1; \mathbf{c}_1)) h_{t-1}$$
  

$$\beta_{11} = \{0.05, 0.09\} \quad , \quad \gamma_1 = \{5, 10\}$$

$$\text{DGP(4)} \quad h_t = (0.1 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2 + 0.825h_{t-1})(1 + \delta_1 G_1(t^*; \gamma_1; c_1))$$
$$\delta_1 = \{0.05, 0.08\}, \gamma_1 = \{5, 10\}$$

前三者為相加模式的TV-GARCH，而DGP(4)則為相乘模式，我們在各個給定的參數下，產生模擬資料，並檢驗這樣的資料會有近似不平穩GARCH的行為。

在後面的章節我們會將模擬出的DGP資料各配適GARCH-t、EGARCH、GJR-GARCH三種模型，以下是這三種模型的簡介：

### (1) GARCH-t Model :

GARCH-t模型是將一般的GARCH模型架構在Student's t分配之下，其模型如下：

$$y_t = a_t, a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-i}^2$$

$$\varepsilon_t \sim t^*(v), \varepsilon_t = \frac{x_t}{\sqrt{v/(v-2)}}$$

通常會要求 $\sum_{i=1}^{\max(q,p)} (\alpha_i + \beta_j) < 1$ 以達到平穩，若 $\sum_{i=1}^{\max(q,p)} (\alpha_i + \beta_j) = 1$ 則代表報酬為隨機漫步(random walk)的序列，並使得模型產生IAGRCH效應(Integrated GARCH effect)，是一個不平穩的序列。

### (2) EGARCH Model :

EGARCH模型(exponential GARCH model)是一個不對稱的模型，由Nelson (1991) 所提出，他對模式取log轉換來消除一般GARCH模型上的限制，並以下列加權模式來考慮在一個資產之正報酬與負報酬的不對稱影響：

$$y_t = a_t, a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \frac{\sum_{j=0}^{s-1} \beta_j B^j}{1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i B^i} g(\varepsilon_{t-1})$$

$$g(\varepsilon_t) = \begin{cases} (\theta + \gamma)\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|) & , \text{if } \varepsilon_t \geq 0 \\ (\theta - \gamma)\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|) & , \text{if } \varepsilon_t < 0 \end{cases} , E(g|\varepsilon_t|) = 0$$

$\theta + \gamma$ 與 $\theta - \gamma$ 各代表了正衝擊與負衝擊的不對稱效應，通常 $\theta$ 用來解釋槓桿作用(leverage)，大多都為正值； $\gamma$ 則用以解釋幅度效果(magnitude)，多為負值。

### (3) GJR-GARCH Model :

GJR-GARCH也是一個不對稱的模型，由Glosten, Jaganathan, and Runkle (1989)所提出。它適合用於掌握波動不對稱之資料，其模型如下：

$$y_t = a_t , a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \gamma_i I_{t-i} a_{t-i}^2$$

$$I_{t-i} = \begin{cases} 1, & a_{t-i} < 0 \\ 0, & a_{t-i} \geq 0 \end{cases}$$

$I_{t-i}$ 為虛擬變數，用來區分好消息與壞消息對於條件波動的不同影響，當前一期的波動為負值時( $a_{t-i} < 0$ )， $I_{t-i} = 1$ ；若前一期的波動為正值( $a_{t-i} \geq 0$ )則 $I_{t-i} = 0$ 。通常我們會希望 $\gamma_i$ 之估計結果為正值。另外，通常也會要求 $\sum_{i=1}^{\max(q,p)} (\alpha_i + \beta_j + 0.5\gamma_i) < 1$ 以達到變異數平穩的限制。

## 2.2 Simulation

在此小節中，我們先生產前面提到的四種TV-GARCH的模擬資料。模型假設如下：

$$y_t = \varepsilon_t , \varepsilon_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\varepsilon_t = \zeta_t \sigma_t , \zeta_t \sim N(0, 1)$$

$$\sigma_t^2 = h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$$

模擬報酬 $y_t$ ，模擬的方式為先自令一個 $h_0$ 的起始值，並由 $\zeta_0\sqrt{h_0} = \varepsilon_0$ 得 $\varepsilon_0$ ， $\zeta_t$ 為  $\text{Normal}(0,1)$ 的亂數，接著用 $\varepsilon_0$ 及 $h_0$ 帶入 DGP 求得 $h_1$ 之後，再求出下一期的 $\zeta_1\sqrt{h_1} = \varepsilon_1$ ，依上述步驟重複疊代下去，可得到一組 $\varepsilon_t$ 的模擬資料，即 $y_t$ 的模擬時間序列資料。

我們總共有四種 DGP 模型可以產生模擬的報酬數據，每種模型又可以將生產係數置換，得到多種不同的組合。我們每次模擬 6000 筆報酬後，丟棄前面 1000 筆，留下 5000 模擬資料。

圖 2-圖 5 為各種生產係數組合下，模擬出來的報酬時間序列圖：

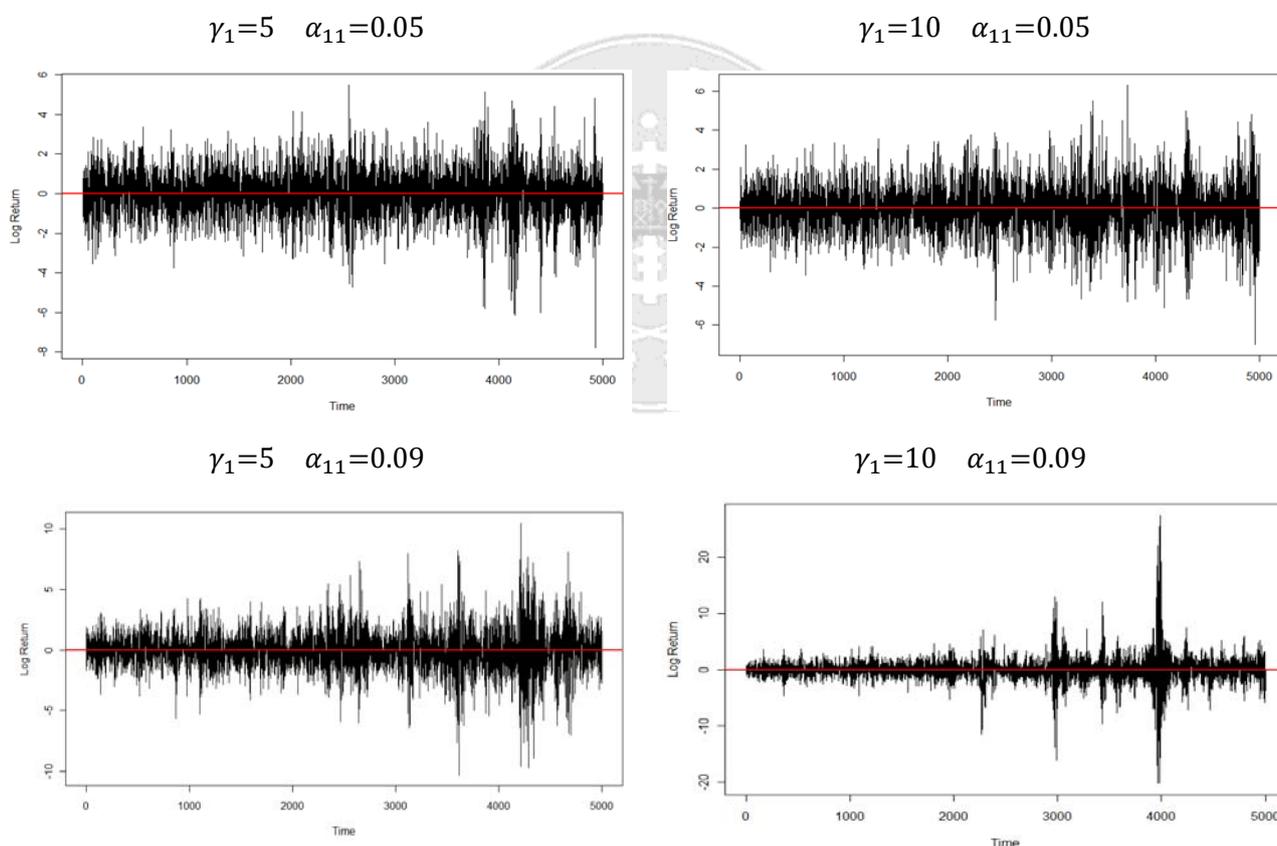


圖 2：DGP(1)各係數下之時間序列圖

圖 2 所呈現出的為 DGP(1)生產出之報酬的時間序列圖。由時間序列圖可觀察出， $\alpha_{11}$ 為 G 函數的作用係數，在 $\alpha_{11}=0.05$ 之下呈現出的波動變異較沒有大幅度的差異；而在 $\alpha_{11}=0.09$ 之下就有較極端的波動出現，且在 $\gamma_1=10$ 時會有波動急遽改變的情況。

探討波動結構性改變的時間序列

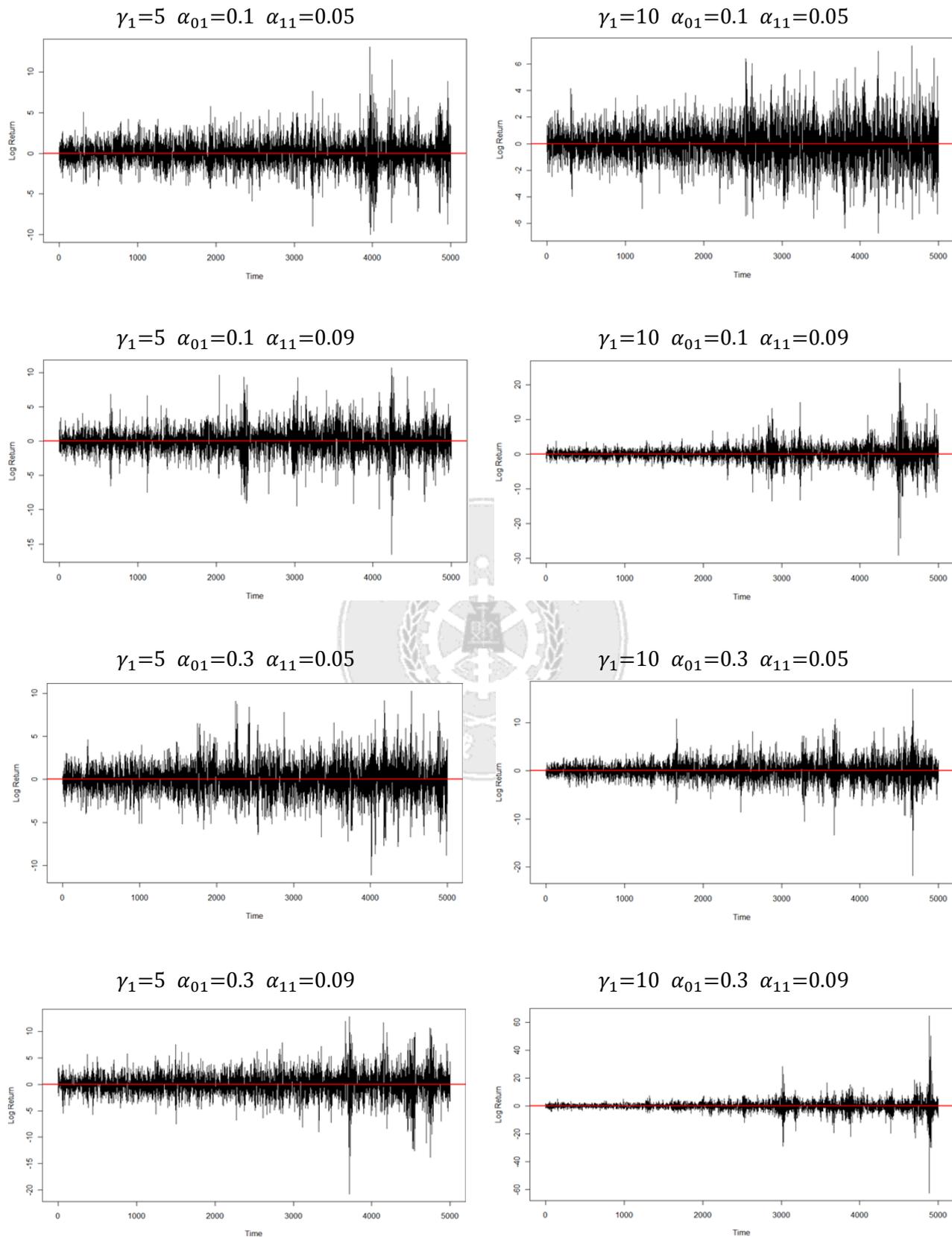


圖 3：DGP(2)各係數下之時間序列圖

圖 3 所呈現出的為 DGP(2)生產出之報酬的時間序列圖。DGP(2)模式為 DGP(1)改為含轉換函數變動的截距項，作用係數為 $\alpha_{01}$ ，而同樣的， $\alpha_{11}$ 為 G 函數在 ARCH 項的作用係數， $\gamma_1$ 為 G 函數的斜率係數，越大使波動的改變越急遽，也會使得波動的變異程度差異更大。

圖 4 為 DGP(3)的各種生產係數組合的模擬資料時間序列圖。 $\beta_{11}$ 為 G 函數的係數，當 $\beta_{11}$ 給定值較大時，G 函數的作用會較明顯，即波動隨時間改變而逐漸變大的情形較明顯；而固定 $\beta_{11}$ 下，越大的 $\gamma_1$ 值則使得波動的改變更突然，由 $\beta_{11} = 0.09$ 下比較 $\gamma_1$ 為 0.05 及 0.09 兩圖，更可以明顯看出波動慢慢變大，跟波動急遽的變大的不同。

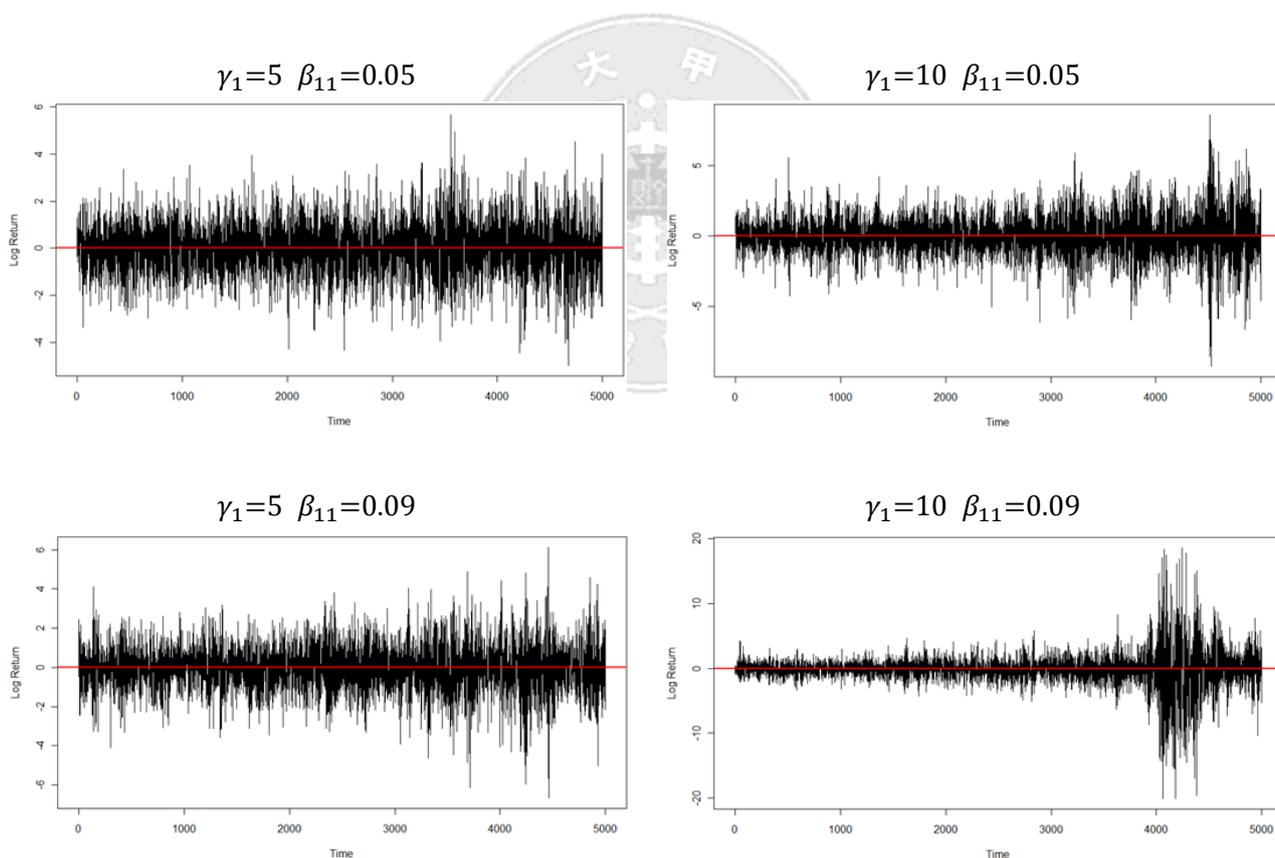


圖 4：DGP(3)各係數下之時間序列圖

圖 5 為 DGP(3)的各種生產係數組合的模擬資料時間序列圖。 $\delta_1$ 為 G 函數的係數，當 $\delta_1$ 給定值較大時，G 函數的作用會較明顯，即波動隨時間改變而逐漸變大的情形較明顯；而固定 $\delta_1$ 下，越大的 $\gamma_1$ 值則使得波動

探討波動結構性改變的時間序列

的改變更突然，由 $\delta_1 = 0.09$ 下比較 $\gamma_1$ 為 5 及 10 兩圖，更可以明顯看出波動慢慢變大，跟波動急遽的變大的不同。

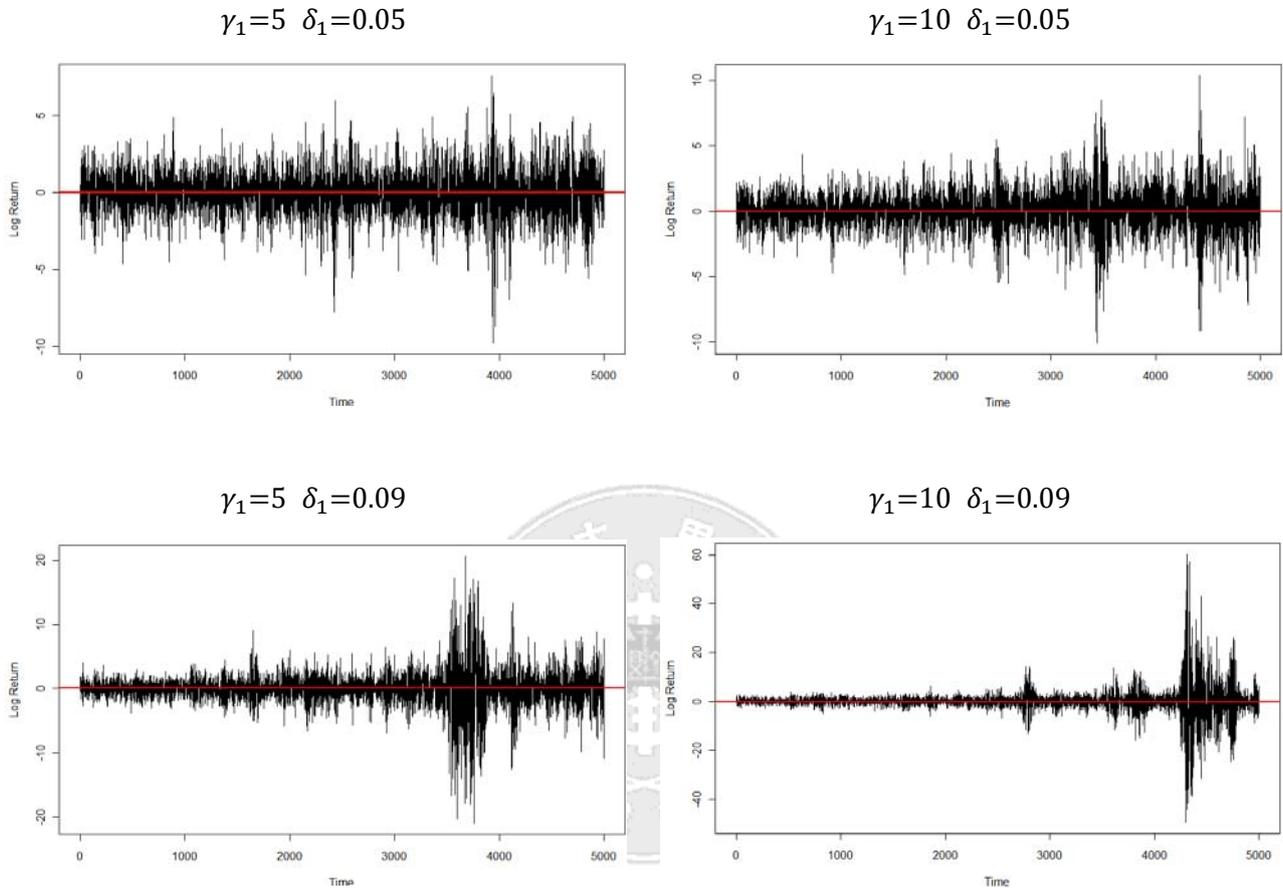


圖 5：DGP(4)各係數下之時間序列圖

### 3. Model Fitting

一般來說 GARCH(1,1) 已經足夠用以描述資料的波動叢聚性，因此本章節我們將模擬出的 DGP 資料各配適了 GARCH-t(1,1)、EGARCH (1,1)、GJR-GARCH (1,1)三種模型，來觀測在結構性改變的模擬資料下，是否確實會產生 IGARCH 效應的情況。

以第一個模型的第一種生產組合為例，模擬出一組含有 6000 筆資料的報酬( $y_t$ )後，丟棄前面 1000 筆，以後面 5000 筆報酬來配適 GARCH-t、EGARCH、GJR-GARCH 三種模型，並將參數記錄下來；上述步驟重複生成 100 次後，得到 100 組的配適參數，再將此 100 組參數取平均值，得到第一個生產組合的平均配適參數。依照上述方式，對每種模型的不同生產組合求得平均配適參數。將其與真實的生產模式係數做比較。我們將此比較整理如下：

表 1：DGP(1) 模擬 100 組配適模型之估計平均值比較表

	生產係數		參數估計值							
	$\gamma_1$	$\alpha_{11}$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\beta_1$	DF	$\alpha_1 + \beta_1$	$\theta$	$\gamma$	$\alpha_1 + \beta_1 + 0.5\gamma$
GARCH-t	5	0.05	0.0953	0.1336	0.8125	10	0.9461			
	5	0.09	0.0910	0.1846	0.7982	10	0.9828			
	10	0.05	0.1066	0.1474	0.7987	10	0.9461			
	10	0.09	0.0848	0.1782	0.8055	10	0.9837			
	<i>True value</i>		<i>0.1000</i>	<i>0.10+G</i>	<i>0.8000</i>					
EGARCH	5	0.05	0.2958	0.2232	0.9312			0.0048	0.2207	
	5	0.09	0.8182	-0.0452	0.9670			-0.0039	0.3340	
	10	0.05	0.3616	0.0325	0.9333			-0.0116	0.2661	
	10	0.09	0.8883	0.0587	0.9666			-0.0130	0.2896	
GJR-GARCH	5	0.05	0.0899	0.1305	0.8141				-0.0101	0.9396
	5	0.09	0.0856	0.1723	0.7987				0.0056	0.9738
	10	0.05	0.0997	0.1317	0.7983				0.0196	0.9398
	10	0.09	0.0800	0.1567	0.8086				0.0215	0.9761

$$DGP(1) : h_t = 0.1 + (0.1 + \alpha_{11}G_1(t^*; \gamma_1; c_1))\varepsilon_{t-1}^2 + 0.8h_{t-1}$$

表 1 為對 DGP(1)配適各個模型之後的估計平均值比較表。由表中我們可以看出，由於轉換函數的作用是在 $\alpha_1$ 項，因此轉換函數的相乘係數 $\alpha_{11}$ 越大，就會使得估計參數的 $\alpha_1$ 結果也越大，進而又使得 $\alpha_1 + \beta_1$ 以及 $\alpha_1 + \beta_1 + 0.5\gamma$ 的結果也有明顯不同。另外由表也可看出在相同的 $\alpha_{11}$ 之下，參數估計值沒有顯著的差異，表示 $\gamma_1$ 的改變沒有明顯的加乘效果。

表 2：DGP(2) 模擬 100 組配適模型之估計平均值比較表

	生產係數			參數估計值							
	$\gamma_1$	$\alpha_{01}$	$\alpha_{11}$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$DF$	$\alpha_1 + \beta_1$	$\theta$	$\gamma$	$\alpha_1 + \beta_1 + 0.5\gamma$
GARCH-t	5	0.1	0.05	0.1198	0.1321	0.8254	10	0.9575			
	5	0.1	0.09	0.1007	0.1588	0.8267	10	0.9855			
	5	0.3	0.05	0.1344	0.1339	0.8460	10	0.9799			
	5	0.3	0.09	0.1047	0.1536	0.8431	10	0.9967			
	10	0.1	0.05	0.0760	0.1322	0.8489	10	0.9810			
	10	0.1	0.09	0.0712	0.1760	0.8239	10	0.9999			
	10	0.3	0.05	0.0675	0.1295	0.8660	10	0.9955			
	10	0.3	0.09	0.0631	0.1759	0.8214	10	0.9973			
		<i>True value</i>			<i>0.10+G</i>	<i>0.10+G</i>	<i>0.8000</i>				
EGARCH	5	0.1	0.05	0.7301	-0.1111	0.9510			-0.0052	0.2590	
	5	0.1	0.09	1.1444	-0.0069	0.9711			-0.0069	0.2823	
	5	0.3	0.05	1.3390	-0.2325	0.9686			0.0090	0.2824	
	5	0.3	0.09	1.6585	-0.1244	0.9795			-0.0006	0.3046	
	10	0.1	0.05	0.8080	-0.1335	0.9676			-0.0054	0.2729	
	10	0.1	0.09	1.2719	0.0689	0.9788			0.0053	0.2912	
	10	0.3	0.05	1.3611	-0.2978	0.9845			0.0104	0.2843	
	10	0.3	0.09	1.8530	-0.0650	0.9871			-0.0036	0.3049	
GJR-GARCH	5	0.1	0.05	0.1127	0.1235	0.8266				0.0024	0.9513
	5	0.1	0.09	0.0967	0.1497	0.8252				0.0065	0.9781
	5	0.3	0.05	0.1271	0.1309	0.8493				-0.0140	0.9732
	5	0.3	0.09	0.0999	0.1508	0.8417				-0.0049	0.9901
	10	0.1	0.05	0.0717	0.1257	0.8491				0.0011	0.9754
	10	0.1	0.09	0.0704	0.1730	0.8236				-0.0098	0.9917
	10	0.3	0.05	0.0620	0.1276	0.8687				-0.0117	0.9904
	10	0.3	0.09	0.0581	0.1558	0.8375				0.0040	0.9953

$$DGP(2) : h_t = (0.1 + \alpha_{01}G_1(t^*; \gamma_1; c_1)) + (0.1 + \alpha_{11}G_1(t^*; \gamma_1; c_1))\varepsilon_{t-1}^2 + 0.8h_{t-1}$$

接著我們觀看表 2 為對 DGP(2) 配適各模型之後的估計平均值比較表。由表中可看出，轉換函數的相乘係數越大，會使得估計參數  $\alpha_1 + \beta_1$  以及  $\alpha_1 + \beta_1 + 0.5\gamma$  結果越來越大。

表 3：DGP(3) 模擬 100 組配適模型之估計平均值比較表

	生產係數		參數估計值							
	$\gamma_1$	$\beta_{11}$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$DF$	$\alpha_1 + \beta_1$	$\theta$	$\gamma$	$\alpha_1 + \beta_1 + 0.5\gamma$
GARCH-t	5	0.05	0.0980	0.1111	0.8314	10	0.9425			
	5	0.09	0.0525	0.1074	0.8807	10	0.9881			
	10	0.05	0.0741	0.1025	0.8536	10	0.9562			
	10	0.09	0.0314	0.1075	0.8912	10	0.9986			
	<i>True value</i>		<i>0.1000</i>	<i>0.1000</i>	<i>0.8+G</i>					
EGARCH	5	0.05	0.3286	0.0240	0.9328			-0.0050	0.2117	
	5	0.09	0.8379	-0.1449	0.9816			-0.0011	0.2163	
	10	0.05	0.2720	-0.1268	0.9520			-0.0035	0.2112	
	10	0.09	1.0373	0.0277	0.9887			-0.0054	0.2013	
GJR-GARCH	5	0.05	0.0937	0.1015	0.8307				0.0096	0.9370
	5	0.09	0.0489	0.0993	0.8827				0.0018	0.9829
	10	0.05	0.0712	0.0918	0.8538				0.0090	0.9501
	10	0.09	0.0300	0.1019	0.8914				0.0006	0.9936

$$DGP(3) : h_t = 0.1 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2 + (0.8 + \beta_{11}G_1(t^*; \gamma_1; c_1))h_{t-1}$$

接著我們觀察表 3：DGP(3) 配適各模型之後的估計平均值比較表。由於轉換函數的作用是在  $\beta_1$  項，因此轉換函數的相乘係數  $\beta_{11}$  越大，就會使得估計參數的  $\beta_1$  結果也越大。同樣的， $\alpha_1 + \beta_1$  以及  $\alpha_1 + \beta_1 + 0.5\gamma$  也會隨著生產係數的提升，越來越接近 1。

表 4：DGP(4) 模擬 100 組配適模型之估計平均值比較表

	生產係數		參數估計值							
	$\gamma_1$	$\delta_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$DF$	$\alpha_1 + \beta_1$	$\theta$	$\gamma$	$\alpha_1 + \beta_1 + 0.5\gamma$
GARCH-t	5	0.05	0.0882	0.1083	0.8601	10	0.9684			
	5	0.08	0.0581	0.1129	0.8802	10	0.9931			
	10	0.05	0.0677	0.1057	0.8731	10	0.9788			
	10	0.08	0.0299	0.0907	0.9077	10	0.9983			
EGARCH	5	0.05	0.7162	-0.0419	0.9630			0.0005	0.2117	
	5	0.08	1.2155	-0.0601	0.9839			-0.0011	0.2219	
	10	0.05	0.7477	-0.0306	0.9717			-0.0014	0.2061	
	10	0.09	1.5723	-0.0632	0.9933			0.0016	0.2085	
GJR-GARCH	5	0.05	0.0838	0.1016	0.8605				0.0020	0.9631
	5	0.08	0.0548	0.1061	0.8807				0.0024	0.9880
	10	0.05	0.0632	0.0981	0.8741				0.0040	0.9742
	10	0.08	0.0280	0.1016	0.8973				-0.0013	0.9982

$$h_t = (0.1 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2 + 0.825h_{t-1})(1 + \delta_1 G_1(t^*; \gamma_1; c_1))$$

最後我們觀察表 4：DGP(4)配適各模型之後的估計平均值比較表。此模型的轉換函數作用是對整個 GARCH 的相乘效果，因此較大的 $\delta_1$ 與 $\gamma_1$ 係數會造成參數估計值的增加。與相加模式來比較，此相乘模式的參數估計值接近 1 的情況也更加明顯，表示與相加模式相較之下，DGP(4)不平穩的狀況更加顯著。

總結來說，由模擬資料配適出來的模型參數，即 $\alpha_1 + \beta_1$ 以及 $\alpha_1 + \beta_1 + 0.5\gamma$ 會隨著生產係數的提升，越來越接近 1，表示 GARCH 的結構性改變可能會使資料呈現出 integrated GARCH effect。

在係數較低時，參數估計的結果以及時間序列圖的呈現會讓我們誤以為資料沒有 persistence 的狀況；但若置換了較大的生產係數時，就會導致資料的波動變得急劇。

## 4. Conclusion

本報告引用了三種相加模式及一種相乘模式的TV-GARCH模型，每種模式各有不同的轉換結構。三種相加模式是分別對條件變異數、非條件變異數部分加入結構性改變函數(轉換函數)；相乘模式則是對整個GARCH模型做結構性改變的加乘效果。首先由時間序列圖可以發現，隨著轉換函數的係數增加，波動會越加急劇。接著我們對每種模式所模擬出之資料配適GARCH-t、EGARCH及GJR-GARCH模型，配適結果發現，在資料明顯為有結構性改變時， $\alpha_1 + \beta_1$ 以及 $\alpha_1 + \beta_1 + 0.5\gamma$ 之估計值會極趨近於1，代表為一個趨近於不平穩的序列，驗證了當時時間序列有結構性改變時，若沒有將結構性的轉換適當的考慮在模式之中；或者錯用了一般的GARCH模型時，會導致序列具有integrated GARCH的特性，出現了長記憶性(Long-memory)、高度持續性(high persistence)的現象。基於本報告的探討結果，未來面對股票市場報酬、匯率報酬…等財務時間序列資料時，就可以用有結構性改變的TV-GARCH來建立模型，來達到更準確的觀測。

## References

- Baillie, R. T., and C. Morana (2007) Modeling Long Memory and Structural Breaks in Conditional Variances: An Adaptive FIGARCH Approach, *Working Paper* No. 593, Queen Mary University of London, Department of Economics.
- Baillie, R. T., T. Bollerslev, and H. O. Mikkelsen (1996) Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 74, 3.30.
- Bollerslev, T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307.327.
- Cristina Amado and Timo Teräsvirta (2008) Modeling Conditional and Unconditional Heteroskedasticity with Smoothly Time-Varying Structure, *Núcleo de Investigação em Políticas Económicas*
- Dahlhaus, R., and S. Subba Rao (2006) Statistical Inference for Time-Varying ARCH Processes, *Annals of Statistics*, 34, 1075.1114.
- Engle, R. F. (1982) Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, 50, 987.1007.
- Mikosch, T., and C. Starica (2004) Nonstationarities in Financial Time Series, the Long-Range Dependence, and the IGARCH Effects, *The Review of Economics and Statistics*, 86, 378.390.
- Teräsvirta, T (1994) Specification, Estimation, and Evaluation of Smooth Transition Autoregressive Models, *Journal of the American Statistical Association*, 89,208.218.
- Bollerslev, T., Chou, R. Y., and Kroner, K. F. (1992) ARCH modeling in finance; A review of the theory and empirical evidence, *Journal of Econometrics*, 52, 5-59.