

## 相機取樣場 — The Camera Sampling Field

Ping-Hsien Lin (林炳賢)      Tong-Yee Lee (李同益)\*

Visual System Lab

Department of Computer Science and Information Engineering

National Cheng Kung University

Tainan, Taiwan, R.O.C.

[hsien@vision.csie.ncku.edu.tw](mailto:hsien@vision.csie.ncku.edu.tw)

[tonylee@mail.ncku.edu.tw](mailto:tonylee@mail.ncku.edu.tw)

### 摘要

在影像式著色法 (*image-based rendering*) 及影像式模型重構 (*image-based modeling*) 的研究領域中, 大多數的研究都著重在如何從已有的數張參考影像中產生新視野的影像或重構幾何模型, 但如何取得較好的參考影像則仍未有一個較明確且量化的方法。本篇論文提出“相機取樣場 (*camera sampling field*)”此一新觀念, 對相機取樣做一數學量化的分析, 利用此一觀念可明確定義出相機取樣的“量”與“質”, 使得我們將來可自動化地取得較好的參考影像, 以產生較好之新視野的影像或幾何模型。

關鍵詞: *Sampling, Image-Based Rendering, Image-Based Modeling, Camera Sampling Field, Camera Sampling Flux.*

### 1 簡介

影像式著色法是由數張參考影像來產生新視野的影像, 而影像式模型重構則是由數張參考影像來重構幾何模型, 在現今大多數的研究[1,2,3,5,6,7,8,9]中, 都著重在著色法及模型重構的方法上, 其參考影像皆是利用一般經驗法則來取得; 而在另外一些研究[4,10]中, 雖然有提及如何取像以增加可視範圍及增進所產生影像之品質, 但都著重在可見性的分析, 缺乏一個較精確的分析取樣品質的量。

在未來影像式著色或影像式模型重構的系統中, “自動化地取得參考影像”是很重要的一項特性, 不僅可降低系統人爲的介入以增進效率, 更可確保系統輸出之品

質。但要能自動化地取得參考影像並確保取樣之品質, 則必須要有一可精確評估取樣品質的量, 也就是要把取樣用一個數學模型明確定義。

在本論文中, 我們根據電學中電場的觀念, 將相機的取樣密度分佈視爲此相機在空間中產生了一個相機取樣場, 並推導出這個場的數學模型, 類似於電通量的觀念, 相機取樣場亦有相機取樣通量, 在第三節中, 我們利用此一數學模型證明一個很直覺的觀念: 一相機對一物體取樣量的多寡可利用該相機對物體的相機取樣通量來評估, 而此相機取樣通量亦正比於物體在影像平面的投影面積。在第四節中, 我們再根據此一模型, 提出五項決定取樣品質的因子, 以對取樣做一明確的量與質之分析。第五節則是實作結果, 以印證我們所提出的觀念。

### 2 相機取樣場 (Camera Sampling Field)

爲了分析相機取樣之好壞 (把相機取樣做量化分析), 我們必須知道相機取樣密度之分佈。類似於電學中電場 (*electric field*) 與電力線 (*lines of force or field lines*) 之觀念 (圖 1), 我們定義兩個相對應之物理量: 相機取樣場 (*camera sampling field*) 及取樣線 (*sampling lines*)。考慮置於空間中的單一相機, 我們說此一相機在它的視野範圍 (*field of view, fov*) 內產生了一個相機取樣場。我們可用連續的取樣線來表示相機取樣場, 取樣線起始於相機投影中心呈輻射狀向外發散, 如圖 2 所示。場的強度正比於取樣線的相對密度 (圖 3), 亦即通過垂直於相機取樣場方向的單位面積上之相對取樣線數。就單一相機而言, 相機取樣場與取樣線之性質描述如下: (標\*號者表示相機取樣場之特有性質)

\* Correspondence Author.

1.\*此兩個物理量只在相機的視野範圍內才有定義。(在

視野範圍外為 0)

2. 取樣線起始於相機投影中心，呈輻射狀向外發散。
3. \*對某一特定取樣線而言，相機取樣場只存在於距投影中心最近之該取樣線與場景模型之交點。  
(性質 1 與 3 在本論文中合稱為“可見” (visible))
4. 在視野範圍固定的條件上，起始於一相機之取樣線數正比於影像之解析度 (resolution)。
5. \*取樣線與影像的交點在影像之軸向為等間距分佈。  
(因為影像之像素為等距分佈，如圖 2 所示)
6. 在任意點的場的方向是指向相機之投影中心。
7. 場的強度正比於取樣線之相對密度，亦即通過垂直於場的方向的單位面積之相對取樣線數。
8. \*相機取樣場之強度無負值。(取樣最差為 0，無負的取樣)

接下來，我們將先推導二維相機取樣場 (2D camera sampling field)，再利用其結果導出三維相機取樣場 (3D camera sampling field)。

(在以下的數學推導符號中，細斜體字母 (*a* or *A*) 表示純量，粗正體小寫字母 (**a**) 表示向量)

### 2.1 2D Camera Sampling Field 之推導

二維相機取樣場  $c''$  (上標 II 表二維) 的推導如圖 4 所示，其中  $\theta(x, y)$  為通過點  $(x, y)$  的取樣線到相機光軸 (optical axis，即圖中的  $y$  軸) 的夾角。

$$\theta(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \quad (1)$$

首先我們先定義在相機光軸上之相機取樣場  $c''(0, y)$ 。我們知道場的強度正比於取樣線之相對密度，而在相機光軸上，其取樣線之密度與距離  $y$  成反比，因此相機光軸上之相機取樣場應如下式(2)所示。

$$c''(0, y) = -\frac{C''}{y} \mathbf{j} \quad (2)$$

其中  $C''$  為二維相機取樣常數 (2D camera sampling constant)， $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$  分別為  $x$  軸與  $y$  軸之單位向量。

現在我們已經知道相機光軸上之相機取樣場，再來便是要推導出在視野範圍內任意點之相機取樣場。我們將點  $(x, y)$  與光軸上的點  $(0, y)$  做一比較 (如圖 4 所示)，場的強度正比於取樣線之密度，又取樣線密度與取樣線之

垂直間距成反比 (如圖 5 所示)，因此點  $(x, y)$  與點  $(0, y)$  之相機取樣場強度比為：

$$\frac{c''(x, y)}{c''(0, y)} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{dx}{dx'} \quad (3)$$

由式(3)，點  $(x, y)$  之場的強度如下式(4)所示。

$$\begin{aligned} c''(x, y) &= \lim_{dx \rightarrow 0} \left[ \frac{dx}{dx'} c''(0, y) \right] \\ &= \dots = \frac{C'' \sqrt{x^2 + y^2}}{y^2} \end{aligned} \quad (4)$$

相機取樣場的方向為指向相機的投影中心，因此，二維相機取樣場之向量場表示方式為：

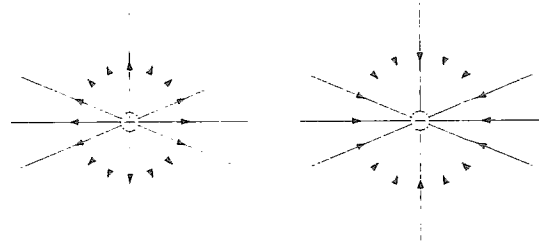


圖 1. 用連續的電力線來表示一帶電電荷之電場，電力線自正電荷呈輻射狀發散而出，最後終止於負電荷。

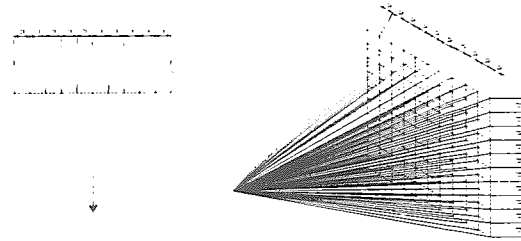


圖 2. 二維相機取樣場與三維相機取樣場，場的方向為指向相機之投影中心，且取樣線與影像平面之交點在影像平面上為等間距分佈。

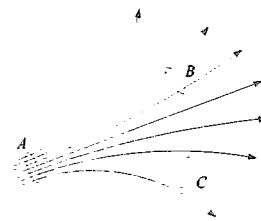


圖 3. 場的強度與通過垂直於場的單位面積的取樣線數有關，把  $C$  處之強度設為零是錯誤的：如果大量增加取樣線數，必有部分取樣線會通過  $C$ 。因此只有相對的取樣線數才是有意義的。

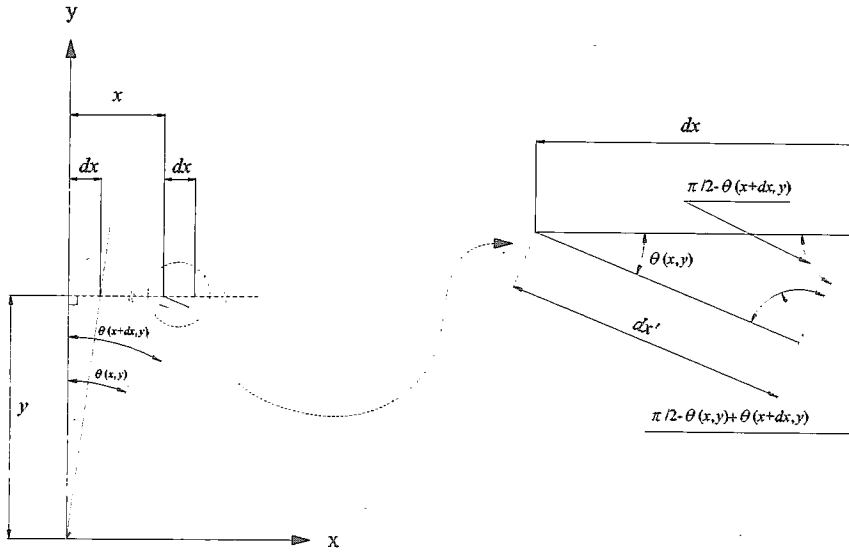


圖 4. 二維相機取樣場之推導圖示。

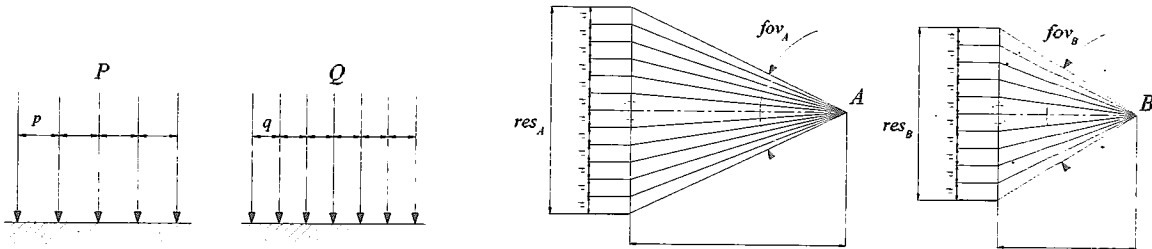


圖 5. 場的強度與取樣線之垂直間距成反比，

$$\text{即 } \frac{c''_P}{c''_Q} = \frac{q}{p}$$

$$\frac{res_A}{2} \cot\left(\frac{fov_A}{2}\right) \quad \frac{res_B}{2} \cot\left(\frac{fov_B}{2}\right)$$

圖 6. 二維相機取樣常數定義之圖示。

$$\begin{aligned} e''(x,y) &= \frac{C'' \sqrt{x^2+y^2}}{y^2} \left( -\frac{xi+yj}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\ &= -C'' \frac{xi+yj}{y^2} \end{aligned} \quad (5)$$

如何決定常數  $C''$  的值呢？我們定義：（見圖 6）

$$c''\left(0, \frac{res}{2} \cot\left(\frac{fov}{2}\right)\right) = 1 \quad (6)$$

其中  $res$  為影像之解析度。（在二維的情況下，只

考慮  $x$  軸向之解析度）。點  $\left(0, \frac{res}{2} \cot\left(\frac{fov}{2}\right)\right)$  為影

像平面之中心點。（我們將影像之尺度視為與空間之尺度相同，即兩個相鄰像素之距離視為 1）

注意式(6)之定義有一非常重要的含意在裏面，依式(6)之定義可知，不同相機其影像中心之場的強度皆為 1。定義不同相機在影像中心（圖 6 中虛線圓圈處）之場強

度為相同是合理正確的，因為在影像中心點處，垂直於場的方向之取樣密度皆為一個單位距離一個取樣點。至於為何把強度定為 1，將在第 3 節中再做說明。此外，空間中任一點的場是根據相機光軸上之相對的取樣線密度所定義出來的，因此，式(6)之定義使得不同相機間的場也可直接比較，不需經過任何轉換。

由式(6)可得：

$$C'' = \frac{res}{2} \cot\left(\frac{fov}{2}\right) \quad (7)$$

因此二維相機取樣場可寫成：

$$e''(x,y) = -\frac{res}{2} \cot\left(\frac{fov}{2}\right) \frac{xi+yj}{y^2} \quad (8)$$

此一結果亦可用一直覺的方式觀察而得：如圖 4 所示，

當決定了相機光軸之場（ $e''(0,y) = -\frac{C''}{y}j$ ）後，考慮

$y$  等於定值之某一條線，以相機之取樣特性而言，在此線上的  $y$  軸方向有一等強度之場  $\frac{C''}{y}$ （即  $y$  軸方向之取樣密度為一定值），即場在  $y$  軸方向之分量為一定值，因此任一點之場的強度為：

$$c''(x,y) = \frac{C''}{y} \frac{1}{\cos\theta} = \frac{C''\sqrt{x^2+y^2}}{y^2} \quad (9)$$

此式與式(4)相同。

### 2.2 3D Camera Sampling Field 之推導

為了推導三維相機取樣場，考慮通過影像上點  $P=(x,y,z)$  之垂直線與水平線之平面  $E_1$ 、 $E_2$ （如圖 7.(a)所示），我們將分別求出點  $P$  在平面  $E_1$ 、 $E_2$  上之二維相機取樣場，再根據兩平面之夾角關係，求出三維相機取樣場。

為了求得點  $P$  在  $E_1$  平面上之二維相機取樣場，我們考慮如圖 7.(b)所示的兩個平面  $E_1$ 、 $E_1'$ ，在  $E_1$  平面上  $O$  點的二維相機取樣場為  $c''(E_1)(O) = \frac{res_y}{2} \cot\left(\frac{fov_y}{2}\right) \frac{1}{z}$ ，

根據圖 6 的觀念可知，點  $Q$  在  $E_1'$  平面上的二維相機取樣場的強度大小等於點  $O$  在  $E_1$  平面上的二維相機取樣場，因此  $c''(E_1')(Q) = c''(E_1)(O) = \frac{res_y}{2} \cot\left(\frac{fov_y}{2}\right) \frac{1}{z}$ 。再利

用二維相機取樣場的推導方式可推得點  $P$  在  $E_1$  平面上的二維相機取樣場：

$$c''(E_1)(P) = \frac{res_y}{2} \cot\left(\frac{fov_y}{2}\right) \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z\sqrt{x^2+z^2}} \quad (10)$$

同理，由圖 7.(c)可得：

$$c''(E_2)(P) = \frac{res_x}{2} \cot\left(\frac{fov_x}{2}\right) \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z\sqrt{y^2+z^2}} \quad (11)$$

平面  $E_1$ 、 $E_2$  的法向量各為  $\mathbf{n}_{E_1} = (z, 0, x)$ 、 $\mathbf{n}_{E_2} = (0, z, y)$ ，因此

$$\cos(\angle E_1, E_2) = \frac{\mathbf{n}_{E_1} \cdot \mathbf{n}_{E_2}}{\|\mathbf{n}_{E_1}\| \|\mathbf{n}_{E_2}\|} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+z^2}\sqrt{y^2+z^2}} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sin(\angle E_1, E_2) &= \sqrt{1 - \cos^2(\angle E_1, E_2)} \\ &= z \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+z^2)(y^2+z^2)}} \end{aligned} \quad (13)$$

接下來便是推導出三維相機取樣場之強度分佈函數  $c'''(x,y,z)$ 。考慮圖 7.(d)，其中平面  $E_3$  為通過點  $P$  且

垂直於通過點  $P$  的取樣線之平面，而面素  $A_p$ 、 $A_o$  各為點  $P$  及點  $O$  之相鄰四條取樣線所圍成且垂直於取樣線之面素。由相機取樣場之基本定義：場的強度正比於取樣線之相對密度，亦即通過垂直於場的方向的單位面積之相對取樣線數，可得：

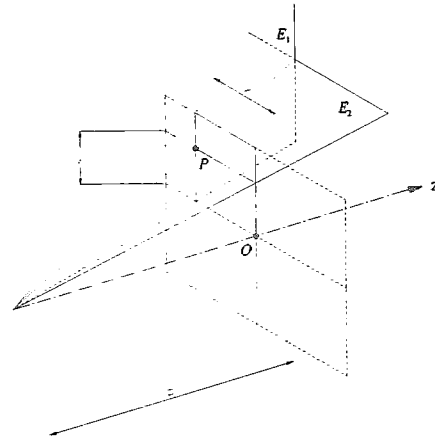


圖 7.(a) 三維相機取樣場之推導圖示。

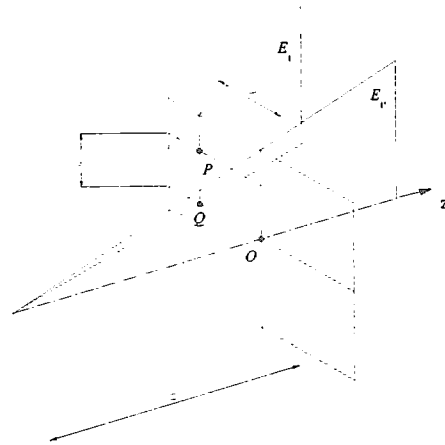


圖 7.(b) 平面  $E_1$ 、 $E_1'$

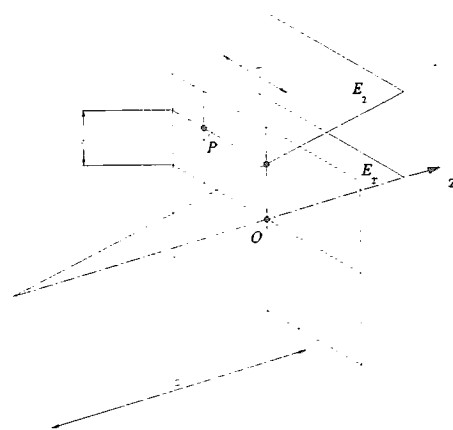


圖 7.(c) 平面  $E_2$ 、 $E_2'$

$$\begin{aligned} \frac{c^m(P)}{c^m(O)} &= \frac{c^m(x, y, z)}{c^m(0, 0, z)} = \lim_{A_o \rightarrow 0} \frac{A_o}{A_p} \\ &= \frac{1}{c^{u(E_1)}(O)} \frac{1}{c^{u(E_2)}(O)} \\ &= \frac{1}{c^{u(E_1)}(P)} \frac{1}{c^{u(E_2)}(P)} \sin(\angle E_1 E_2) \end{aligned} \quad (14)$$

在光軸上的場  $c^m(O)$  為：

$$\begin{aligned} c^m(O) &= c^{u(E_1)}(O) c^{u(E_2)}(O) \\ &= \frac{res_y}{2} \cot\left(\frac{fov_y}{2}\right) \frac{1}{z} \frac{res_x}{2} \cot\left(\frac{fov_x}{2}\right) \frac{1}{z} \end{aligned} \quad (15)$$

又，對同一相機而言：

$$\begin{aligned} \frac{res_y}{2} \cot\left(\frac{fov_y}{2}\right) &= \frac{res_x}{2} \cot\left(\frac{fov_x}{2}\right) \\ &\equiv \frac{res}{2} \cot\left(\frac{fov}{2}\right) \end{aligned} \quad (16)$$

式(15)可改寫成：

$$c^m(0, 0, z) = \frac{res^2}{4} \cot^2\left(\frac{fov}{2}\right) \frac{1}{z^2} \quad (17)$$

此式表示在光軸上的三維相機取樣場與  $z^2$  成反比，是完全合理的，而且在影像中心點的場為：

$$c^m\left(0, 0, \frac{res}{2} \cot\left(\frac{fov}{2}\right)\right) = 1 \quad (18)$$

式(18)與前一節二維相機取樣場的定義是一致的，即在影像中心點處之場的強度等於 1。此外三維相機取樣常數為：

$$C^m = \frac{res^2}{4} \cot^2\left(\frac{fov}{2}\right) = (C^u)^2 \quad (19)$$

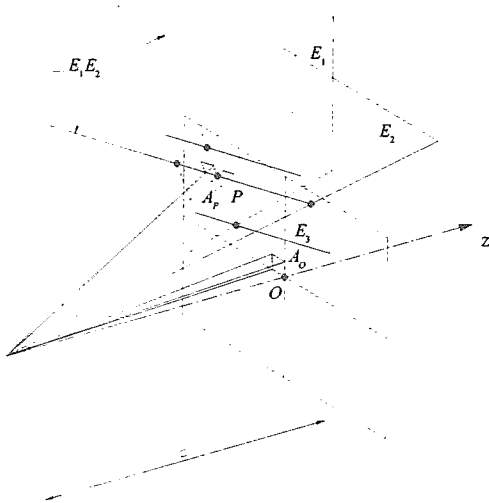


圖 7.(d) 面素  $A_p$ 、 $A_o$ 。

因此，三維相機取樣場可由式(14)改寫而得：

$$\begin{aligned} c^m(x, y, z) &= \frac{1}{c^{u(E_1)}(O)} \frac{1}{c^{u(E_2)}(O)} c^m(0, 0, z) \\ &= \frac{1}{c^{u(E_1)}(P)} \frac{1}{c^{u(E_2)}(P)} \sin(\angle E_1 E_2) \\ &= \frac{res^2}{4} \cot^2\left(\frac{fov}{2}\right) \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z^3} \end{aligned} \quad (20)$$

而三維相機取樣場之向量場表示方式為：

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^m(x, y, z) &= \frac{res^2}{4} \cot^2\left(\frac{fov}{2}\right) \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z^3} \left( -\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= -\frac{res^2}{4} \cot^2\left(\frac{fov}{2}\right) \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{z^3} \end{aligned} \quad (21)$$

此一結果亦可用一直覺的方式觀察而得：如圖 4 所示，

當決定了相機光軸之場 ( $\mathbf{c}^m(0, 0, z) = -\frac{C^m}{z^2} \mathbf{k}$ ) 後，考

慮  $z$  等於定值之某一平面，以相機之取樣特性而言，即

是在此平面上的  $z$  軸方向有一等強度之場  $\frac{C^m}{z^2}$  (即  $z$  軸

方向之取樣密度為一定值)，即場在  $z$  軸方向之分量為一定值，因此任一點之場的強度為：

$$c^m(x, y, z) = \frac{C^m}{z^2} \frac{1}{\cos\theta} = \frac{C^m \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z^3} \quad (22)$$

此式與式(20)相等。

### 3 相機取樣通量 (Camera Sampling Flux)

以下的討論是針對三維相機取樣場，雖然二維相機取樣場亦有類似之性質，但較沒有應用上之價值，因此在此性質上暫不對二維相機取樣場做討論。(此處之討論是針對三維相機取樣場，因此不再特別標示上標  $^m$ )

類似於電學中的電通量 (electric flux)，我們定相機取樣通量 (camera sampling flux) 為：

$$\Phi_c = \int_{S_v} \mathbf{c} \cdot d\mathbf{a} \quad (23)$$

其中  $S$  為空間中一曲面，下標  $v$  表 visible，即此積分式只對可見之面積做積分。

相機取樣通量與電通量最大的差異在於：相機取樣場只在視野範圍內之可見處有值 (其餘為 0)，且無負值通

量。如圖 8 所示，面素  $A$  有一正值通量  $\mathbf{c} \cdot d\mathbf{a}$ ；面素  $B$  之通量為  $\mathbf{c} \cdot d\mathbf{a} = 0$  ( $\alpha = 90^\circ$ )；面素  $C$ 、 $D$  之通量為 0，因為在不可見處之場皆為 0。

由上面相機取樣通量之定義可知，對一物體而言，其通量愈大則表示此相機對此物體取樣的量愈多；其實利用物體在影像的投影面積亦可判斷取樣量之多寡，以下將證明一物體的相機取樣通量將等於其在影像之投影面積。

首先，我們先計算三維相機取樣場之散度 (*divergence*)。  
(以下之證明，我們將先忽略相機取樣場之可見性及無負值之限制)

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = \nabla \cdot \left( -\frac{res^2}{4} \cot^2 \left( \frac{fov}{2} \right) \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{z^3} \right) = 0 \quad (24)$$

由高斯散度定理可知，圖 9 中，在曲面  $S_1$ 、 $S_2$  及四個角錐平面 ( $S_3$ 、 $S_4$ 、 $S_5$ 、 $S_6$ ) 所圍成之區域  $V$  內，

$$\oint_{S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6} \mathbf{c} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{c} d\tau = 0 \quad (25)$$

其中  $d\tau = dx dy dz$ ， $V$  為  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ 、 $S_4$ 、 $S_5$ 、 $S_6$  所包圍之體積。

但在四個角錐平面 ( $S_3$ 、 $S_4$ 、 $S_5$ 、 $S_6$ ) 上  $\mathbf{c} \cdot d\mathbf{a} = 0$  ( $\because \mathbf{c} \perp d\mathbf{a}$ )，所以

$$\int_{S_1+S_2} \mathbf{c} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (26)$$

又曲面  $S_1$  上  $\mathbf{c} \cdot d\mathbf{a} > 0$ ，曲面  $S_2$  上  $\mathbf{c} \cdot d\mathbf{a} < 0$ ，所以

$$\int_{S_1} \mathbf{c} \cdot d\mathbf{a} + \int_{S_2} \mathbf{c} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (27)$$

由式(27)可知：在同一體積角度下，任一曲面之通量皆是相同的，因此由式(23)來求物體之相機取樣通量會等於在影像平面(圖 9.  $I$ )上求投影面積的通量。又由式(21)可知，在影像平面中心點上的相機取樣場為：

$$\mathbf{c} \left( 0, 0, res \cot \left( \frac{fov}{2} \right) \right) = -\mathbf{k} \quad (28)$$

由相機取樣場的特性可知，在影像平面上的場在  $z$  軸方向的分量皆為 1，因此：

$$\Phi_c = \int_{S_1} \mathbf{c} \cdot d\mathbf{a} = \int \mathbf{c} \cdot d\mathbf{a} = \int_I 1 da = Area(I) \quad (29)$$

故得証在三度空間上計算場景(或物體)之相機取樣通量會等於其在影像平面上之投影面積。(在第 2 節中的

式(6)，將影像中心點之場的強度設為 1，使得通量的值會等於投影面積的值)

#### 4 與取樣相關的五項因子

在前面兩節中，我們利用數學物理模型證明：一個相機對一個物體取樣之判斷，可利用物體在影像上之投影面積。但所謂取樣之好壞並不能全由取樣量多寡(投影面積)來做判斷。考慮圖 10 兩個不同視角之高腳杯，圖 10.(a)之投影面積比圖 10.(b)要小一些，但一般來說，我們會採用 10.(a)之取樣方式，主要有兩個原因：

1. 圖 10.(a)對高腳杯的取樣較圖 10.(b)來的均勻些。(即可見處之相機取樣場之分佈較為均勻)

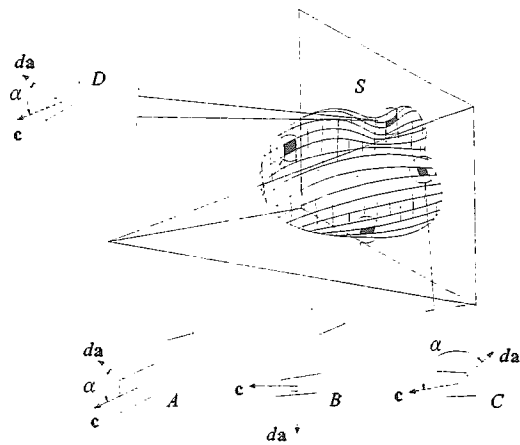


圖 8. 相機取樣場中之假想曲面及曲面上四面素。

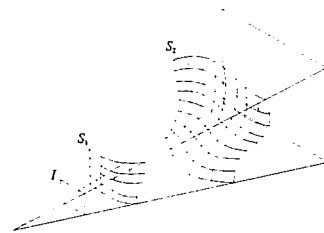


圖 9. 在同一體積角度下之曲面，其通量是相同的。

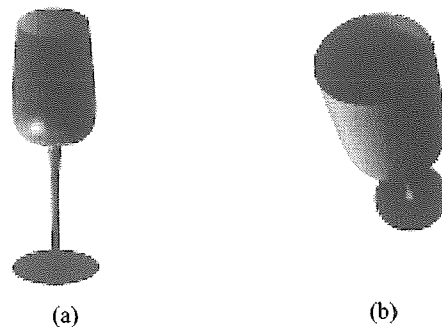


圖 10. 高腳杯在不同視角所取得之影像。

2. 圖 10.(a)的取樣方式較為正向。(即較多數平面之法向量與相機取樣場之方向的夾角較小)

由上面的討論，我們可將取樣做“量”與“質”的分析，其中相機取樣通量視為是取樣量的衡量標準，而取樣質的衡量標準則需根上述兩個原因之敘述來做定義。根據第一項敘述，我們可利用場景上之通量平均值 ( $\mu_f$ ) 及其標準差 ( $\sigma_f$ ) 來做取樣質的衡量標準。

$$\mu_f = \frac{\int_{S_v} \mathbf{c} \cdot d\mathbf{a}}{\int_{S_v} 1d\mathbf{a}} = \frac{\Phi_c}{\int_{S_v} 1d\mathbf{a}} \quad (30)$$

$$\sigma_f = \left( \frac{\int_{S_v} \left( \mathbf{c} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{|d\mathbf{a}|} - \mu_f \right)^2 d\mathbf{a}}{\int_{S_v} 1d\mathbf{a}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (31)$$

根據第二項敘述，我們可利用場景幾何面上之法向量與相機取樣場之方向的單位向量的內積之平均值 ( $\mu_n$ ) 及其標準差 ( $\sigma_n$ ) 來做為取樣質的另一衡量標準。

$$\mu_n = \frac{\int_{S_v} \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} \cdot d\mathbf{a}}{\int_{S_v} 1d\mathbf{a}} \quad (32)$$

$$\sigma_n = \left( \frac{\int_{S_v} \left( \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{|d\mathbf{a}|} - \mu_n \right)^2 d\mathbf{a}}{\int_{S_v} 1d\mathbf{a}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (33)$$

由前面的討論可知， $\mu_f$ 、 $\mu_n$  愈大愈好， $\sigma_f$ 、 $\sigma_n$  愈小愈好。因此，一個判斷取樣好壞較完整的衡量標準應該有五項因子： $\Phi_c$ 、 $\mu_f$ 、 $\sigma_f$ 、 $\mu_n$ 、 $\sigma_n$ 。

由前面的定義可知：若我們著重在場景的幾何模型之取樣，則 $\mu_f$ 、 $\sigma_f$ 是較重要的考量因子，而若著重在場景光度之取樣，則 $\mu_n$ 、 $\sigma_n$ 是較重要的考量因子。

## 5 實作與結果

表 1、2 為實作列表，所有取像的投影中心到物體的質心都是固定的，我們利用數值分析的高斯雙重積分 (Gaussian double integral) 來計算所有的積分式；而 visible surface 的判斷則是把每個三角形的三個頂點之投影後的 z 值，與 z-buffer 中該投影點的 z 值做比較，

若有兩個或兩個以上的點為可見，則將此三角形視為可見，否則視為不可見。

表中 pixel area 欄位是指以影像中物體投影像素的個數來計算物體在影像平面的投影面積，pixel area 的誤差與  $\sqrt{\text{image resolution}} = \sqrt{\text{res}_x \cdot \text{res}_y}$  成反比 (因為誤差只發生在投影影像之輪廓)，因此我們採用較大的影像解析度 (512×512) 以降低此誤差。表中的順序是依 pixel area 來做排序，由第 3 節中的討論可知：物體之相機取樣通量  $\Phi_c$  會等於其在影像平面上之投影面積；而 pixel area 是投影面積之近似值，二者的值會很接近。

觀察表 1 可知圖(c)之 $\mu_f$ 最大、 $\sigma_f$ 最小 ( $\sigma_f=0$ )、 $\mu_n$ 最大、 $\sigma_n$ 最小，是一最佳之取樣 (在不考慮取樣量的形況下)；而比較圖(a)與圖(d)可知，雖然圖(d)之 $\mu_f$ 與 $\mu_n$ 較大，但其 $\sigma_f$ 與 $\sigma_n$ 皆太大，是較不好的取樣。

觀察表 2 可知圖(a)、(b)、(c)之投影面積都很接近，但圖(b)之 $\sigma_f$ 最小，是一取樣最均勻的情形。

## 6 結論與未來研究方向

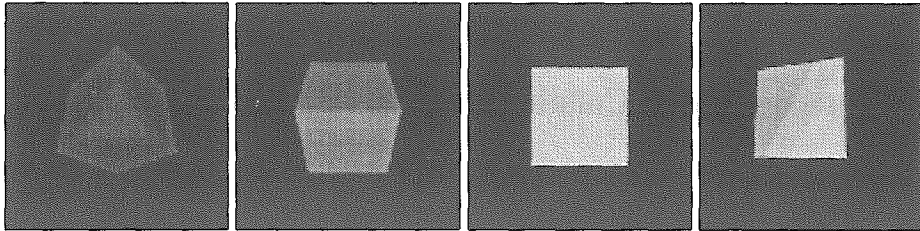
本論文提出兩個物理量：相機取樣場及相機取樣通量，這兩個物理量不僅把一些較簡單且直覺的觀念做數學模型化，而有一較嚴謹之描述，而且也提供未來要做取樣最佳化之數學基礎。

所謂取樣最佳化可能有幾種方式：

1. 給定一場景 (或一物體) 及取樣相機數，如何找出這幾個相機之最佳取樣位置？
2. 給定一場景 (或一物體) 及所要取樣的比列數 (即所要看到的面積與場景全部面積之比值)，如何找出所需之相機數及其位置？

雖然我們已將相機取樣場數學模型化，但它與電場、磁場、力場等向量場有兩個最大的差異在於：(1)場的密度在空間中為非等方向性分佈 (其強度分佈函數我們已在本論文的第二節中導出)。(2)相機取樣場必須在相機的視野範圍內且為相機所可見之處才存在，此項特性使得在取樣最佳化的過程中，會有較複雜的判斷及計算，是個有待更深入探討與研究的領域。

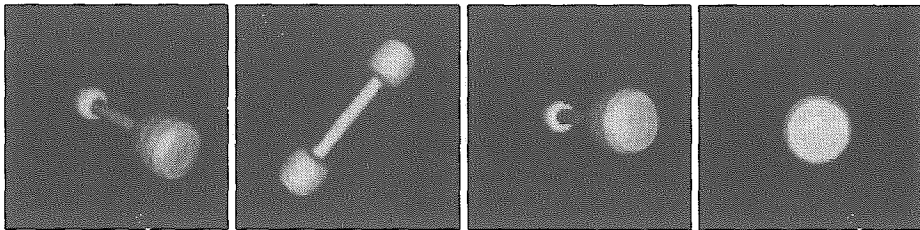
方塊  
cube  
12 triangles  
image: 512×512



	(a)	(b)	(c)	(d)
$\dots$ pixel area	55248	53320	49284	47917
$\Phi_c$	55221.9	53173.3	49152	47921.6
$\mu_r$	1.84073	2.65867	4.9152	2.39608
$\sigma_r$	0.622891	0.838436	0.00	2.06153
$\mu_n$	0.421212	0.580737	0.980029	0.496514
$\sigma_n$	0.0502257	0.0900113	0.0123027	0.398924

表 1. 實驗數據列表 (一)。

啞鈴  
barbell  
4364 triangles  
image: 512×512



	(a)	(b)	(c)	(d)
pixel area	28570	27856	27511	21596
$\Phi_c$	28526.5	27489.8	27031.7	21440.6
$\mu_r$	0.114858	0.114949	0.121992	0.293137
$\sigma_r$	0.104058	0.0573542	0.131269	0.196915
$\mu_n$	0.447272	0.58431	0.420895	0.560247
$\sigma_n$	0.243638	0.274581	0.277814	0.363264

表 2. 實驗數據列表 (二)。

參考文獻

[1] Chen, S. E., L. Williams, "View Interpolation for Image Synthesis", Proceedings of SIGGRAPH '93, pp. 270-288, 1993.

[2] Chen, S. E., "QuickTime VR- An Image-Based Approach to Virtual Environment Navigation", Proceedings of SIGGRAPH '95, pp. 29-39, 1995.

[3] Debevec, P. E., C. J. Taylor, J. Malik, "Modeling and Rendering Architecture from Photographs: A Hybrid Geometry- and Image-Based Approach", Proceedings of SIGGRAPH '96, pp. 11-21, 1996.

[4] Fredo D. George D., Claude P., "The Visibility Skeleton: A Powerful and Efficient Multi-Purpose Global Visibility Tool", Proceedings of SIGGRAPH '97, 89-100, 1997.

[5] Jonathan S., Steven G., Li-wei He, and Richard S., "Layered Depth Images", Proceedings of SIGGRAPH '98, 231-242, 1998.

[6] Marc L., Pat H., "Light Field Rendering", Proceedings of SIGGRAPH '96, pp. 31-42, 1996.

[7] McMillan, L., G. Bishop, "Plenoptic Modeling: An Image-Based rendering System", Proceedings of SIGGRAPH '95, pp. 39-46, 1995.

[8] Steven J. G., Radek G., Richard S., Michael F. C., "The Lumigraph", Proceedings of SIGGRAPH '96, pp. 43-54, 1996.

[9] Steven M. S., Charles R. D., "View Morphing", Proceedings of SIGGRAPH '96, pp. 21-30, 1996.

[10] Stürzlinger, Wolfgang., "Imaging all Visible Surfaces", UNC Computer Science Technical Report TR98-010, University of North Carolina, March 1998.