逢甲大學學生報告 ePaper

報告題名：

機率模型程式應用

Probabilistic Model & Probabilistic-Programming

作者：黃博進

系級：資訊工程學系 二丙

學號：D0409891

開課老師：林佩君

課程名稱：機率論

開課系所：資訊工程學系

開課學年： 105 學年度 第 2 學期

中文摘要

目的：

為了幫助同學了解與學習第四章中的各個隨機變數，其機率質量函數（probability mass function，簡寫為 pmf）與之圖形、累積分布函數（cumulative distribution function，簡寫為 cdf）與之圖形、期望值 E(X)、變異數 Var(X)，並試著利用程式軟體解題或描繪函數圖形。

過程及方法：

Distribution	p.m.f	c.d.f.	E(X)	Var(X)	Graph of p.m.f.	Graph of c.d.f.	Example	Programming
Discrete Distribution Function								
Bernoulli	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	1-7 EX6a, 6b, 6c, 6d, 6f(a)	1-8
Binomial	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6	2-7 EX6i	2-8 EX6h
Poisson	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6	3-7 EX7a, 7b, 7c, 7e(a)	3-8
Geometric	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6	4-7 EX8a	4-8
Negative Binomial	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6	5-7 EX8d, 8g	5-8
Hypergeometric	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6	6-7 EX8i, Problem81	6-8
Zeta (Zipf)	7-1	7-2	7-3	7-4	7-5	7-6	7-7	7-8

根據以上的表格，找出各個隨機變數其所對應的機率質量函數(p.m.f)、累積分布函數(c,d,f)、期望值 E(X)、變異數 Var(X)、機率質量函數圖形，累積分布函數圖形與用來解題或繪圖的程式碼。舉例來說，1-1 格需要填入 bernoulli 分佈的機率質量函數(p.m.f)，1-2 需要填入 bernoulli 分佈的累積分布函數(c,d,f)，1-3 為 bernoulli 分佈的期望值 E(X)，1-4 為 bernoulli 分佈的變異數 Var(X)，1-5 為 bernoulli 分佈的機率質量函數圖形，1-6 為 bernoulli 分佈的累積分布函數圖形，1-7 為課本中之練習題，1-8 為解 bernoulli 分佈題目或繪製 bernoulli 分佈函數圖形的程式碼。

結果：

此報告的結果即為下面所展示的報告成品，透過網路查找與繪圖程式實作，能夠讓學生對於各個隨機變數有更深的了解，因此藉由完成此報告能加強學生對於各個隨機變數的性質與其函式代表的意義。

關鍵字：累積分布函數、期望值、隨機變數、機率質量函數、變異數。

Abstract

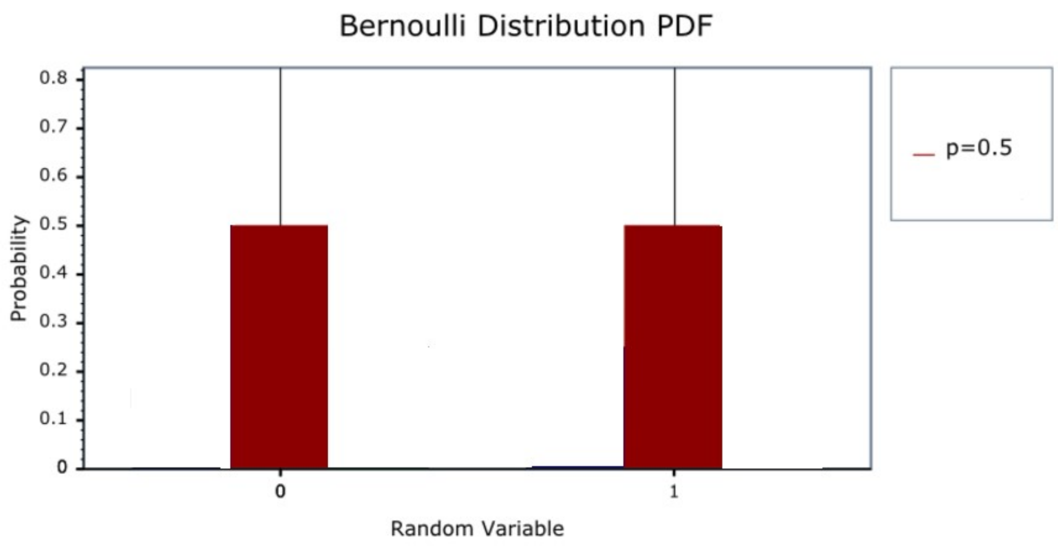
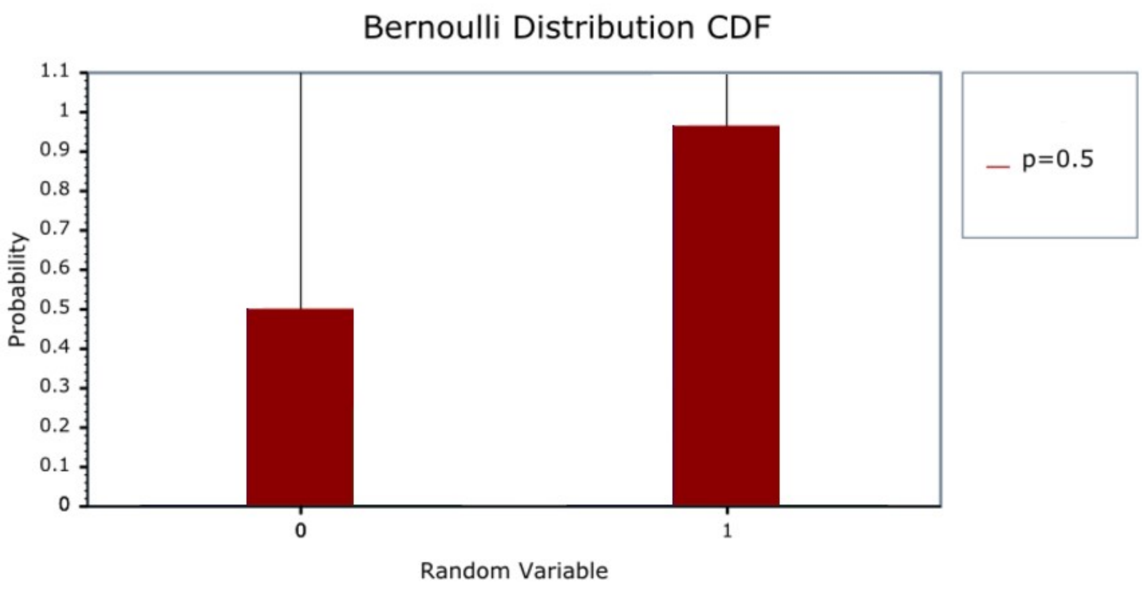
In order to help students to understand and study each of the random variables in Chapter 4, This report needs to find out the nature of each random variable.

Keyword：random variable、probability mass function(pmf)、
cumulative distribution function(cdf).

目　次

目錄

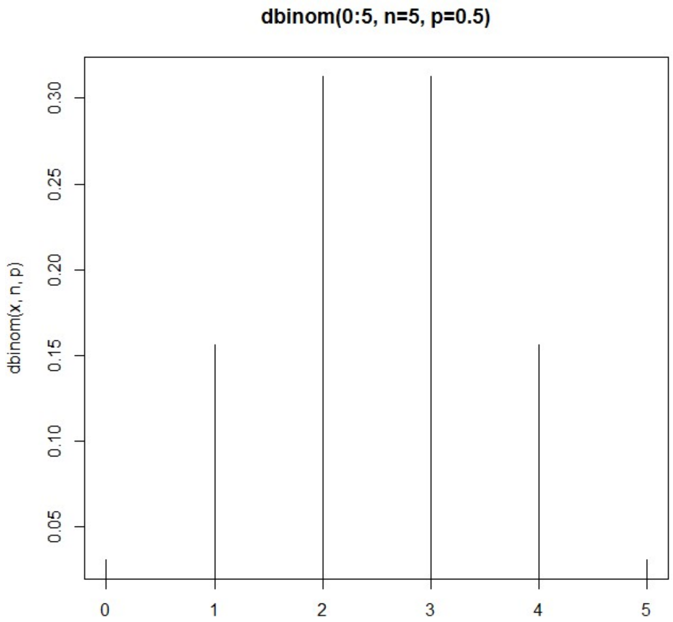
機率論 CH4 作業

1-1	$f_X(x) = p^x(1-p)^{1-x} = \begin{cases} p & \text{if } x = 1, \\ q & \text{if } x = 0. \end{cases}$
1-2	$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$
1-3	$\mathrm{E}[X] = \sum_{i=0}^{1} x_i f_X(x) = 0 + p = p$
1-4	$\mathrm{var}[X] = \sum_{i=0}^{1} (x_i - E[X])^2 f_X(x) = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p) = pq$
1-5	
1-6	

<table>
<tr>
<td>加分題 1-8</td>
<td>
程式：R 軟體
意義：dbinom(x; n, p)：在 n 次柏努力試驗中有 x 次成功的機率 (已知單次試驗成功機率為 p)。
課本題目 6a：丟擲五枚硬幣，找出硬幣朝上的分布列。
程式內容：

```
> n=5; p=0.5; x=seq(0,n)  #正面機率 0.5;執行 5 次;X 次正面
> plot(x, dbinom(x,n,p), type='h', main='dbinom(0:5, n=5,
p=0.5)', xlab='x') #產生 PMF 圖
```

執行結果：



此圖與課本計算結果相符。
</td>
</tr>
<tr>
<td>2-1</td>
<td>

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>2-2</td>
<td>

$$F(x;n,p) = \Pr(X \le x) = \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>2-3</td>
<td>

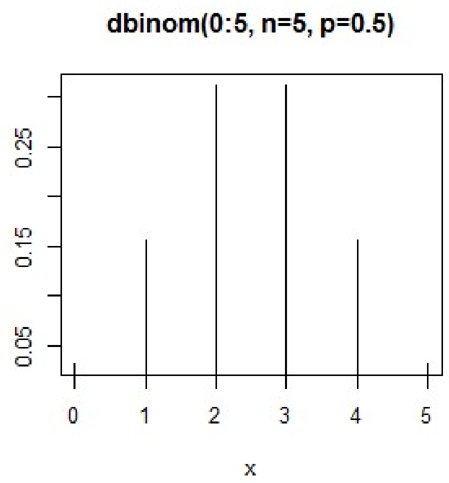
$$\begin{aligned} & \sum_{x=0}^{n} x b(x;n,p) \\ = & \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ = & np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{x!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x} \\ = & np \sum_{x=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{x!(n-1-x)!} p^x (1-p)^{n-1-x} \\ = & np \end{aligned}$$

</td>
</tr>
</table>

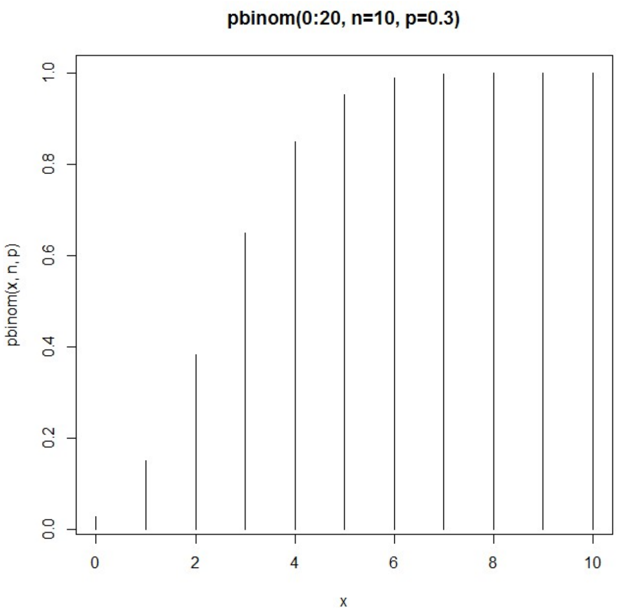
<table>
<tr><td>2-4</td><td>

$$\begin{aligned} &\sum_{x=0}^{n}(x(x-1)-(2\mu-1)x+\mu^2)b(x;n,p)\\ =&\sum_{x=0}^{n}x(x-1)b(x;n,p)-(2\mu-1)\sum_{x=0}^{n}xb(x;n,p)\\ &+\mu^2\sum_{x=0}^{n}b(x;n,p)\\ =&\sum_{x=0}^{n}x(x-1)\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}-(2\mu-1)\mu+\mu^2\\ =&n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-2-(x-2))!}p^{x-2}\\ &\cdot(1-p)^{n-2-(x-2)}+\mu-\mu^2\\ =&n(n-1)p^2+np-n^2p^2\\ =&np(1-p)\end{aligned}$$

</td></tr>
<tr><td>2-5</td><td>

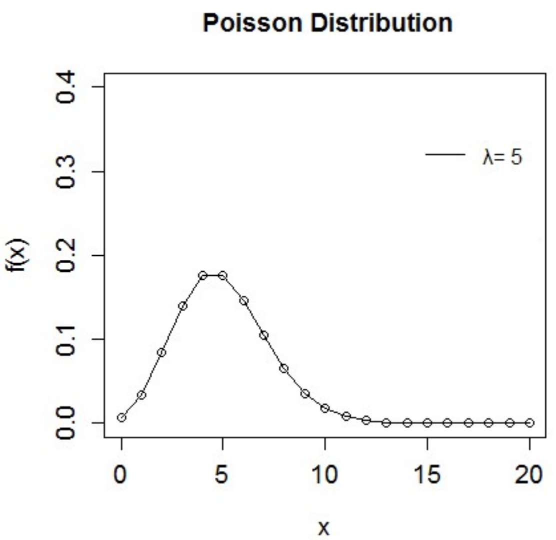


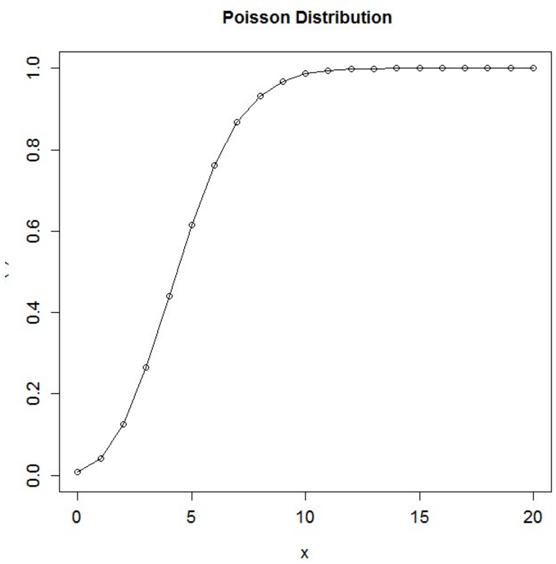
</td></tr>
<tr><td>2-6</td><td>



</td></tr>
</table>

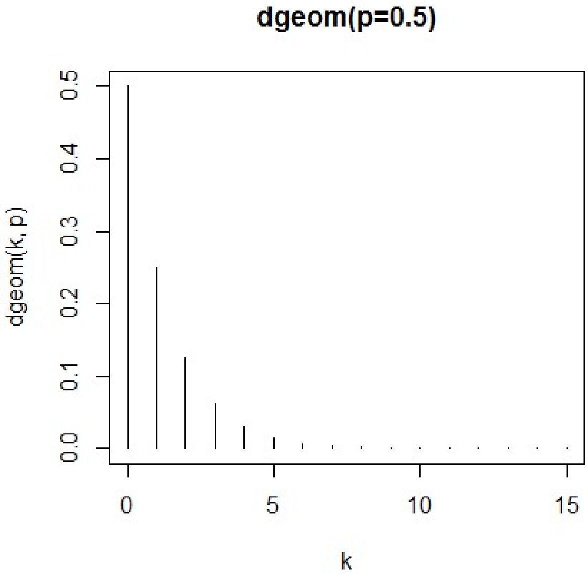
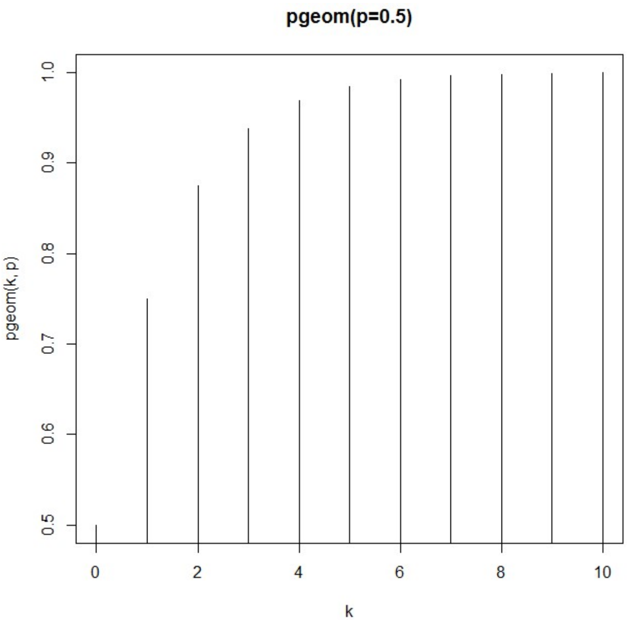
加分題 2-8	程式：R 軟體
	意義：dbinom(x; n, p)：在 n 次柏努力試驗中有 x 次成功的機率 (已知單次試驗成功機率為 p)。
	程式內容：
	`> n=10; p=0.3; x=seq(0,n)  #成功機率 0.3;執行 10 次;X 次成功`
	`> plot(x, dbinom(x,n,p), type='h', main='dbinom(0:20, n=10, p=0.3)', xlab='x') #產生 PMF 圖`
	`> plot(x, pbinom(x,n,p), type='h', main='pbinom(0:20, n=10, p=0.3)', xlab='x') #產生 CDF 圖`
	執行結果：2-5 的 PMF 圖 & 2-6 的 CDF 圖

3-1	$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$
3-2	$F_X(x)=\mathrm{P}(X\le x)= e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\lfloor k\rfloor}\frac{\lambda^i}{i!}$
3-3	$\mu = \sum_{x=0}^{\infty} xp(x;\lambda)=\lambda e^{\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e\lambda = \lambda$
3-4	$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty}(x-\lambda)^2 p(x;\lambda)$ $= \sum_{x=0}^{\infty}(x(x-1)-(2\lambda-1)x+\lambda^2)p(x;\lambda)$ $= \sum_{x=0}^{\infty}x(x-1)p(x;\lambda)-(2\lambda-1)\sum_{x=0}^{\infty}xp(x;\lambda)+\lambda^2\sum_{x=0}^{\infty}p(x;\lambda)$ $= \lambda^2-(2\lambda-1)\lambda+\lambda^2=\lambda$
3-5	

3-6	

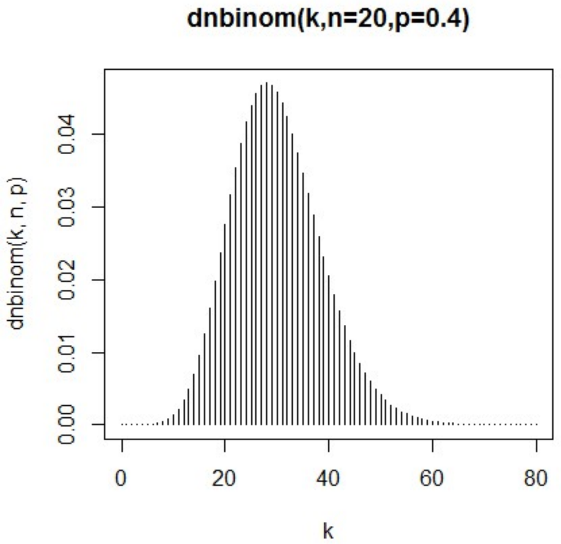
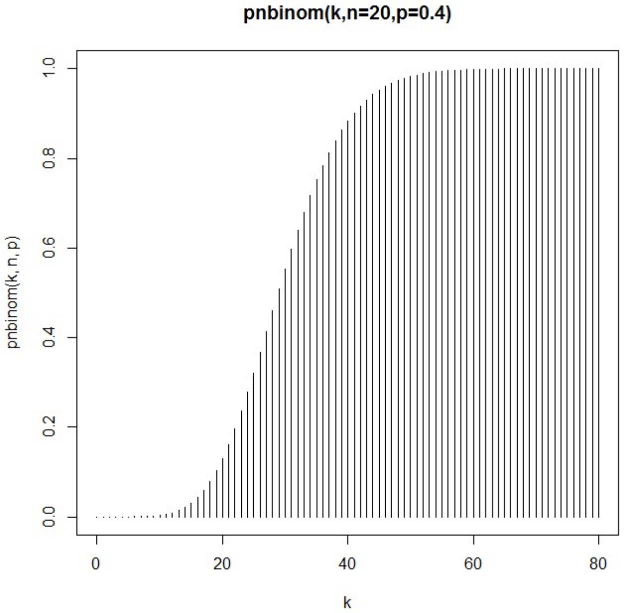
加分題
3-8
	程式：R 軟體
	意義：<u>pois(x,λ)</u>：在單位時間 x 內，事件出現平均 λ 次的機率分布。
	程式內容：
	`> x=seq(0,20,by=1)  #設定區間，下一行 dpos(x,5)設定λ為 5`
	`> plot(x,dpois(x,5),"o", ylab="f(x)",ylim=c(0,0.4),main=" Poisson Distribution", cex.lab=1.2, cex.axis=1.2)`
	`#產生 PMF 圖`
	`> plot(x,ppois(x,5),"o", ylab="f(x)",ylim=c(0,1),main=" Poisson Distribution", cex.lab=1.2, cex.axis=1.2)`
	`#產生 CDF 圖`
	執行結果：3-5 的 PMF 圖 & 3-6 的 CDF 圖

4-1	$f(x) = P(X = x) = (1-p)^{x-1}p$
4-2	$F(x) = P(X \leq x) = 1-(1-p)^x$
4-3	$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xf(x) = \sum_{x=1}^{\infty} xp(1-p)^{x-1}$ $= -p\frac{d}{dp}(\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^x) = -p\frac{d}{dp}(\frac{1-p}{p}) = \frac{1}{p}.$

4-4	$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p(1-p)^{x-1} \\ &= p\sum_{x=1}^{\infty}(x+1)x(1-p)^{x-1} - p\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} \\ &= p\frac{d^2}{dp^2}(\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x+1}) - p\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} \\ &= p\frac{d^2}{dp^2}(\frac{(1-p)^2}{p}) - \frac{1}{p} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}. \end{aligned}$ $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1-p}{p^2}.$
4-5	
4-6	

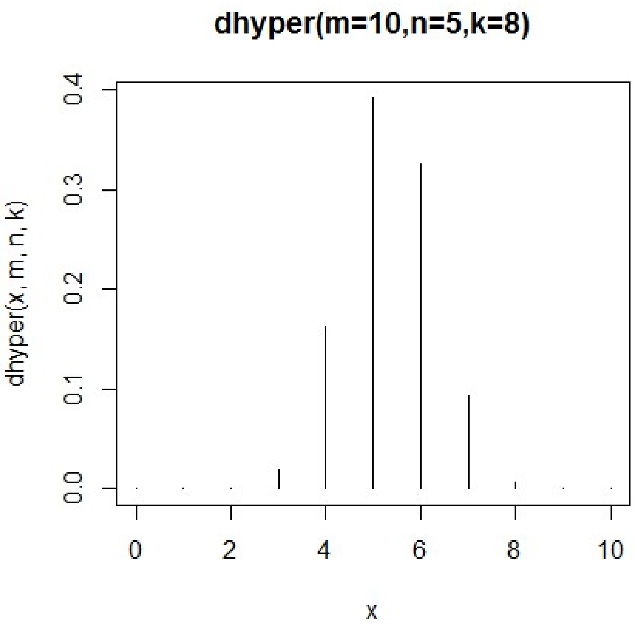
加分題 4-8	程式：R 軟體
	意義：geom(p(成功機率))：第 1 次成功所需要的試驗次數。
	程式內容：
	`> p=0.5; k=seq(0,10) #設定每次成功率為 0.5;區間由 0~10`
	`> plot(k, dgeom(k, p), type='h', main='dgeom(p=0.5)', xlab='k')`
	`#產生 PMF 圖`
	`> plot(k, pgeom(k, p), type='h', main='pgeom(p=0.5)', xlab='k')`
	`#產生 CDF 圖`
	執行結果：4-5 的 PMF 圖 & 4-6 的 CDF 圖

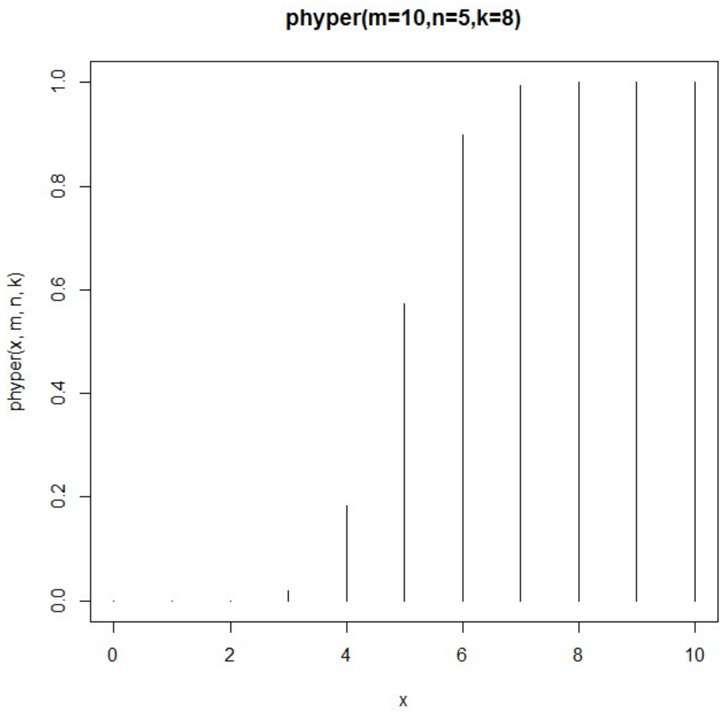
5-1	$f(x)=P(X=x)=\binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}p^r$
5-2	$F(x\|r,p)=\sum_{i=0}^{x}\binom{r+i-1}{i}p^r q^i I_{(0,1,\dots)}$
5-3	$E[X^k] = \sum_{n=r}^{\infty} n^k \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$ $= \frac{r}{p}\sum_{n=r}^{\infty} n^{k-1}\binom{n}{r}p^{r+1}(1-p)^{n-r}$ Here $n\binom{n-1}{r-1}=r\binom{n}{r}$ $= \frac{r}{p}\sum_{m=r+1}^{\infty}(m-1)^{k-1}\binom{m-1}{r}p^{r+1}(1-p)^{m-(r+1)}$ Let $m=n+1$ $= \frac{r}{p}E[(Y-1)^{k-1}]$ 其中 Y 為參數是 $(r+1,p)$ 的負二項隨機變數. 在上式中令 k=1 得 $E[X]=\frac{r}{p}$
5-4	令 k=2, 且利用剛剛得到的期望值. 得 $E[X^2]=\frac{r}{p}E[Y-1]=\frac{r}{p}\left(\frac{r+1}{p}-1\right)$ 故得 $Var(X)=\frac{r}{p}\left(\frac{r+1}{p}-1\right)-\left(\frac{r}{p}\right)^2=\frac{r(1-p)}{p^2}$

5-5	
5-6	

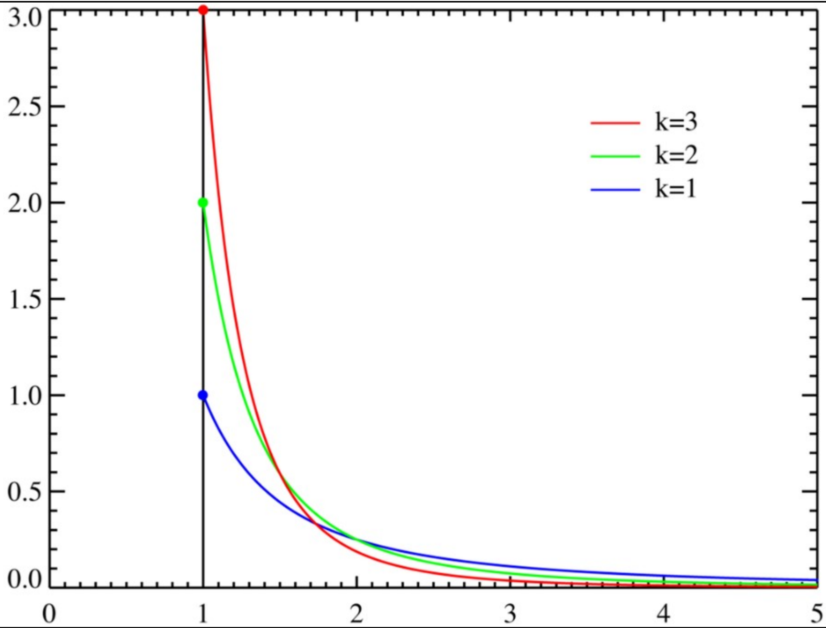
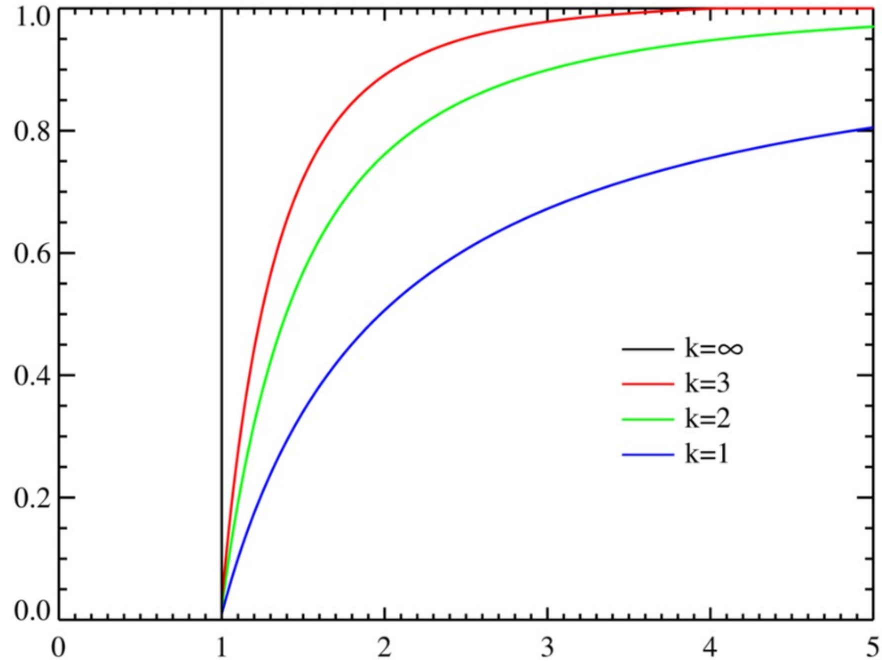
加分題 5-8	程式：R 軟體
	意義：nbinom(x,s, p(成功機率))：要得到第 s 次成功所需的試驗次數 x
	程式內容：
	`> n=20; p=0.4; k=seq(0,80) #設定每次成功率為 0.4;區間由 0~80`
	`> plot(k, dnbinom(k,n,p), type='h',`
	`main='dnbinom(k,n=20,p=0.4)', xlab='k') #產生 PMF 圖`
	`> plot(k, pnbinom(k,n,p), type='h',`
	`main='pnbinom(k,n=20,p=0.4)', xlab='k') #產生 CDF 圖`
	執行結果：5-5 的 PMF 圖 & 5-6 的 CDF 圖

6-1	$P(X=k)=\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

6-2	$F(x \mid M,K,N)=\sum_{i=0}^{x}\frac{\binom{K}{i}\binom{M-K}{N-i}}{\binom{M}{N}}$
6-3	$E[X^k]=\sum_{i=0}^{n} i^k P\{X=i\}=\sum_{i=1}^{n} i^k\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n}$ 利用恒等式 $i\binom{m}{i}=m\binom{m-1}{i-1}$ 和 $n\binom{N}{n}=N\binom{N-1}{n-1}$ $E[X^k]=\frac{nm}{N}\sum_{i=1}^{n} i^{k-1}\binom{m-1}{i-1}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N-1}{n-1}$ $=\frac{nm}{N}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)^{k-1}\binom{m-1}{j}\binom{N-m}{n-1-j}\Big/\binom{N-1}{n-1}=\frac{nm}{N}E[(Y+1)^{k-1}]$
6-4	在上面的式子中令 $k=2$, 可以得到 $E[X^2]=\frac{nm}{N}E[Y+1]=\frac{nm}{N}\left[\frac{(n-1)(m-1)}{N-1}+1\right]$ $\mathrm{Var}(X)=\frac{nm}{N}\left[\frac{(n-1)(m-1)}{N-1}+1-\frac{nm}{N}\right]$ 令 $p=m/N$, 且利用等式 $\frac{m-1}{N-1}=\frac{Np-1}{N-1}=p-\frac{1-p}{N-1}$ $\mathrm{Var}(X)=np[(n-1)p-(n-1)\frac{1-p}{N-1}+1-np]=np(1-p)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$
6-5	

<table>
<tr><td>6-6</td><td>
</td></tr>
<tr><td>加
分
題

6-8</td><td>程式：R 軟體
意義：hyper(x,m,n,k) ：m 個球中有白球有 n 個，黑球 m-n 個，取出 k 個球，其中有 x 個白球的機率; (取後不放回)
程式內容：
<code>> m=10; n=5; k=8 #10 個球;5 白 5 黑取 8 球</code>
<code>> x=seq(0,10) #間距 0~10</code>
<code>> plot(x, dhyper(x, m, n, k), type='h', main='dhyper(m=10,n=5,k=8)', xlab='x') #產生 PMF 圖</code>
<code>> plot(x, phyper(x, m, n, k), type='h', main='phyper(m=10,n=5,k=8)', xlab='x') #產生 CDF 圖</code>
執行結果：6-5 的 PMF 圖 & 6-6 的 CDF 圖</td></tr>
<tr><td>7-1</td><td>$$f(k,\alpha,N)=\frac{1/k^{\alpha}}{\sum_{n=1}^{N}(1/n^{\alpha})}$$</td></tr>
<tr><td>7-2</td><td>$$F(k,\alpha,N)=\frac{\sum_{n=1}^{k}(1/n^{\alpha})}{\sum_{n=1}^{N}(1/n^{\alpha})}$$</td></tr>
<tr><td>7-3</td><td>$$E[X]=\frac{H_{n,\alpha-1}}{H_{n,\alpha}}$$</td></tr>
<tr><td>7-4</td><td>$$V[X]=\frac{H_{n,\alpha-2}H_{n,\alpha}-H_{n,\alpha-1}^{2}}{H_{n,\alpha}^{2}}$$</td></tr>
</table>

7-5	
7-6	

參考文獻

1. 陳鍾誠-機率統計—使用 R 語言 網頁內容。
2. 陳鍾誠 (2010 年 04 月 27 日)，(網頁標題) 陳鍾誠的網站首頁，(網站標題) 陳鍾誠的網站，取自 http://ccckmit.wikidot.com/main ，網頁修改第 4 版。