FCU ePaper

逢甲大學學生報告 ePaper

報告題名：卡爾曼濾波器之簡要理論

A Brief Theory of Kalman Filter

作者：林伯彥

系級：通訊四乙

學號：D0550129

開課老師：林育德

課程名稱：高等生醫信號處理

開課系所：自動控制工程學系研究所

開課學年：108 學年度 第二學期

中文摘要

本篇報告以較簡要的方法來探討卡爾曼濾波器(Kalman Filter)的由來以及原理探討，以最小均方誤差演算法為基礎，將卡爾曼濾波器最重要的五條式子推導出來，而其中推導過程將會使用到統計信號處理之相關內容，並且使用到有關最小均方誤差之演算法，在最後以一個簡單的例子來驗證卡爾曼濾波器的成效。而卡爾曼濾波器適合用於交通工具的導航或者飛航科技、機器人的控制、軌跡最佳化等。在這篇報告中，在驗證部分使用的是 MATLAB (2018b, MathWorks®, Inc., USA)，而卡爾曼濾波器則是以副程式的方式來撰寫。而在最後結果分別依照不同雜訊的影響進行卡爾曼濾波器之性能探討。

關鍵字：卡爾曼濾波器、非穩態信號處理、統計信號處理、最小均方誤差演算法。

Abstract

This paper use a brief way to explore the origin of Kalman filter and develop five important algorithms based on minimum mean-square-error algorithm. Before we develop those algorithms, you need to know some basic knowledge about statistical signal processing and minimum mean-square-error algorithm. This filter is used in a vehicle's navigation, robot control, flying technology and trajectory optimization, where a signal trajectory can be well defined. In this paper, all of computer experiments were conducted in MATLAB (2018b, MathWorks®, Inc., USA). Kalman filter was written as a subroutine. In the result, the performance of Kalman filter is discussed according to the influence of different noise.

Keyword：Kalman Filter, minimum Mean-Square-Error (mMSE) Algorithm, Nonstationary Signal Processing, Statistical Signal Processing.

目　次

一、 介紹

從古至今關於最佳化線性濾波器的演算法以及結構已經發展出各種不同的形式，而這些不同種類的演算法中的係數及估測方式也使用了一些遞迴方式來更新。而在這些演算法中，有些結構是階數遞迴(order-recursive)，而有些是時間遞迴(time-recursive)，但是實際上，在這些遞迴演算法中，最主要的目的就是要利用過去的資料來更新現在的資料，像是Levinson algorithm、Schür algorithm等。這些演算法在大部分的情況下，都能夠將信號計算出來，像是在已知信號的統計特性時，就可以使用該種類的演算法，或者該信號屬於非時變，也可使用上述演算法。但是這些演算法只限於計算穩態信號，如果遇到非穩態信號時，這些演算法可能無法預測信號正確值，導致獲得錯誤的結果。

為了能夠在非穩態信號中，也可計算出所要的數值，在1960年時，R.E. Kalman發明了一種另類的演算法來處理mMSE線性濾波，也就是所謂的卡爾曼濾波器(Kalman filter)，此種濾波器就可以應用在非穩態信號上，也就是時變信號。卡爾曼濾波器最常使用在交通工具的導航或者飛航科技、機器人的控制、軌跡最佳化等。而卡爾曼濾波器最實用的地方在於能夠從一系列包含雜訊的測量值中，能夠以動態的方式以及不同時間的數值來做估計，因此比起首段所提及的演算法，能夠更精準地預估所要的數值，因此此套系統才會應用在航太科技上。

在此報告中的第二部分會大略的說明卡爾曼濾波器演算法的推導；第三部分會展示卡爾曼濾波器的程式以及程式說明；第四部份則為卡爾曼濾波器的程式執行結果；第五部分則為結論及心得；第六部分則是參考文獻。而在此僅討論離散時間的卡爾曼濾波器，不討論連續時間類型。

二、 卡爾曼濾波器演算法的推導

計算卡爾曼濾波器之前，必須先定義一個模型，其形式如下:

$$\mathbf{y}(\mathrm{n}) = \mathbf{A}(n-1)\mathbf{y}(n-1) + \mathbf{B}(n)\boldsymbol{\eta}(n) \qquad (1)$$

式(1)就是所謂的信號(或狀態向量)模型，而其中:

$\mathbf{y}(\mathrm{n})$代表的是一個在時間 n 時的$\mathrm{k}\times 1$信號狀態向量；$\mathbf{A}(n-1)$是一個$\mathrm{k}\times\mathrm{k}$的矩陣，代表的是有關$\mathbf{y}(n-1)$到$\mathbf{y}(\mathrm{n})$中的強迫函數(forcing function)；$\boldsymbol{\eta}(n)$為一個平均值為 0 的$\mathrm{k}\times 1$白雜訊序列，而$\boldsymbol{R}_{\eta}(n)$為其共變異數；$\mathbf{B}(n)$為一個大小為$\mathrm{k}\times\mathrm{k}$的輸入矩陣。

當知道$\boldsymbol{\eta}(n)$為一個建模誤差向量(modeling error vector)時，矩陣$\mathbf{A}(n-1)$就可知道為一個狀態轉移矩陣(state-transition matrix)。而式(1)代表的是$\mathbf{y}(\mathrm{n})$是由前

一個時間所得到的資料$\mathbf{y}(n-1)$與其狀態矩陣相乘後，再加上當前時刻所得到的白雜訊乘上$\mathbf{B}(n)$得到，因此可以得知$\mathbf{y}(\mathrm{n})$只需要$\mathbf{y}(\mathrm{n}-1)$即可得到，不用再重新計算，因此可以節省不少的運算邏輯單元。

而觀察模型$\boldsymbol{x}(n)$與$\mathbf{y}(\mathrm{n})$可以由以下的線性關係式描述:

$$\boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{H}(n)\boldsymbol{y}(n) + \boldsymbol{v}(n) \qquad (2)$$

而當中的$\boldsymbol{x}(n)$為一個時間為 n 的$\mathrm{m}\times 1$的信號狀態向量；$\boldsymbol{H}(n)$為一個$\mathrm{m}\times\mathrm{k}$的矩陣，代表$\boldsymbol{x}(n)$與$\boldsymbol{y}(n)$為理想的線性關係；$\boldsymbol{v}(n)$為一個平均值為 0 的$\mathrm{k}\times 1$白雜訊序列，而$\boldsymbol{R}_v(n)$為其共變異數；矩陣$\boldsymbol{H}(n)$為輸出矩陣，而序列$\boldsymbol{v}(n)$則為觀測誤差。再來定義了以下的統計特性:

$$E\{\boldsymbol{y}(n)\boldsymbol{v}^H(l)\} = 0, for\ \ all\ \ n, l \qquad (3)$$
$$E\{\boldsymbol{\eta}(n)\boldsymbol{v}^H(l)\} = 0, for\ \ all\ \ n, l \qquad (4)$$
$$E\{\boldsymbol{\eta}(n)\boldsymbol{y}^H(-1)\} = 0, for\ \ all\ \ n \qquad (5)$$
$$E\{\boldsymbol{y}(-1)\} = 0 \qquad (6)$$
$$E\{\boldsymbol{y}(-1)\boldsymbol{y}^H(-1)\} = \boldsymbol{R}_y(-1), for\ \ all\ \ n \qquad (7)$$

其中特性(3)至(5)代表各自的隨機變數的正交性，而特性(6)與(7)建立了初始條件向量$\boldsymbol{y}(-1)$的平均值及共變異數。

從式(1)與(5)可以得知，對所有的時間n來說，$\boldsymbol{y}(n)$的平均值為 0，所以可以知道其相關矩陣可以寫為:

$$\mathbf{R}_y(n) = \mathrm{E}\{\boldsymbol{y}(n)\boldsymbol{y}(n)^H\}$$
$$= \mathbf{A}(n-1)\mathbf{R}_y(n-1)\mathbf{A}^H(n-1) + \mathbf{B}(n)\mathbf{R}_\eta(n)\mathbf{B}^H(n) \qquad (8)$$

式子中$\mathbf{R}_y(n-1)$代表的是$\mathbf{y}(n-1)$的相關矩陣。

從式(2)中得知，對所有的時間n來說，$\boldsymbol{x}(n)$的平均值為 0，所以從式(8)可以得到其相關矩陣為:

$$\mathbf{R}_x(n) = \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^H(n)\}$$
$$= \mathbf{H}(n)\left[\mathbf{A}(n-1)\mathbf{R}_y(n-1)\mathbf{A}^H(n-1) + \mathbf{B}(n)\mathbf{R}_\eta(n)\mathbf{B}^H(n)\right]\mathbf{H}^{\boldsymbol{H}}(n)$$
$$+ \mathbf{R}_v(n) \qquad (9)$$

有了以上所定義的數值，再來就可以對最佳化估測進行推導。

再來利用式(1)及(5)可以得到估計值，而$\boldsymbol{y}(n)$的一階預測式如下:

$$\widehat{\boldsymbol{y}}(n|n-1) = \mathbf{A}(n-1)\widehat{\boldsymbol{y}}(n-1|n-1) \qquad (10)$$

當中$\widehat{\boldsymbol{y}}(n|n-1)$代表$\boldsymbol{y}(n-1)$的條件之下，所得到估計值$\widehat{\boldsymbol{y}}(n)$的數值，而初始條件$\widehat{\boldsymbol{y}}(-1|-1)=\widehat{\boldsymbol{y}}(-1)$。從式(2)可以得到$\boldsymbol{x}(n)$的一階預測式，可以表示為:

$$\widehat{\boldsymbol{x}}(n|n-1)=\boldsymbol{H}(n)\widehat{\boldsymbol{y}}(n|n-1)=\boldsymbol{H}(n)\mathbf{A}(n-1)\widehat{\boldsymbol{y}}(n-1|n-1) \tag{11}$$

因此我們需要利用遞迴式來計算預測觀察量。接著預測誤差從式(2)可寫為:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(n)&=\boldsymbol{x}(n)-\widehat{\boldsymbol{x}}(n|n-1)\\&=\boldsymbol{H}(n)\boldsymbol{y}(n)+\boldsymbol{v}(n)-\boldsymbol{H}(n)\widehat{\boldsymbol{y}}(n|n-1)\\&=\boldsymbol{H}(n)\widetilde{\boldsymbol{y}}(n|n-1)+\boldsymbol{v}(n)\end{aligned} \tag{12}$$

式(12)就代表著觀測量與估計觀測量之間的誤差，而我們定義信號預測誤差為:

$$\widetilde{\boldsymbol{y}}(n|n-1)\triangleq\boldsymbol{y}(n)-\widehat{\boldsymbol{y}}(n|n-1) \tag{13}$$

再來$\mathbf{w}(n)$的相關矩陣$\mathbf{R}_w(n)$如下:

$$\mathbf{R}_w(n)=\mathrm{E}\{\boldsymbol{w}(n)\boldsymbol{w}^H(n)\}=\boldsymbol{H}(n)\mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n-1)\boldsymbol{H}^H(n)+\boldsymbol{R}_v(n) \tag{14}$$

式(14)當中，$\mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n-1)$定義為$\mathrm{E}\{\widetilde{\boldsymbol{y}}(n|n-1)\widetilde{\boldsymbol{y}}^H(n|n-1)\}$，而此稱為前置預測共變異數矩陣(a priori error covariance)。再來使用 mMSE 的估計式如下:

$$\hat{y}_m=\hat{y}_{m-1}+\ \mathrm{E}\{y|w_m\}=\hat{y}_{m-1}+\mathrm{E}\{y_m w_m^*\}(\mathrm{E}\{w_m w_m^*\})^{-1}w_m \tag{15}$$

式(15)代表y在時刻m的估計值，可以由前一時刻的估計值加上已知誤差條件下，所得到的誤差量。而$\mathrm{E}\{y_m w_m^*\}$，可以由式(12)與式(13)得到:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\{y_m w_m^*\}&=\mathrm{E}\{\boldsymbol{y}(n)\boldsymbol{w}^H(n)\}=\mathrm{E}\{\boldsymbol{y}(n)[\widetilde{\boldsymbol{y}}^H(n|n-1)\boldsymbol{H}^H(n)+\boldsymbol{v}^H(n)]\}\\&=E\{[\widetilde{\boldsymbol{y}}(n|n-1)+\widehat{\boldsymbol{y}}(n|n-1)\times[\widetilde{\boldsymbol{y}}(n|n-1)^H\boldsymbol{H}^H(n)+\boldsymbol{v}^H(n)]]\}\\&=E\{\widetilde{\boldsymbol{y}}(n|n-1)\widetilde{\boldsymbol{y}}(n|n-1)^H\}\boldsymbol{H}^H(n)\\&=\mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n-1)\boldsymbol{H}^H(n)\end{aligned} \tag{16}$$

式(16)中因為最佳預測誤差$\widetilde{\boldsymbol{y}}(n|n-1)$與最佳預測值$\widehat{\boldsymbol{y}}(n|n-1)$彼此正交，因此可以寫成上述結果。經由運算得到(16)後，我們可以將式改寫為:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{y}}(n|n) &= \hat{\boldsymbol{y}}(n|n-1) + \mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n-1)\boldsymbol{H}^H(n)\mathbf{R}_w{}^{-1}(n)[\boldsymbol{x}(n) - \hat{\boldsymbol{x}}(n|n-1)] \\ &= \hat{\boldsymbol{y}}(n|n-1) + \boldsymbol{K}(n)[\boldsymbol{x}(n) - \boldsymbol{H}(n)\hat{\boldsymbol{y}}(n|n-1)]\end{aligned} \tag{17}$$

其中:

$$\boldsymbol{K}(n) \triangleq \mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n-1)\boldsymbol{H}^H(n)\mathbf{R}_w{}^{-1}(n) \tag{18}$$

就是所謂的卡爾曼增益矩陣(Kalman gain matrix)，在來使用式(17)中的$\hat{\boldsymbol{y}}(n|n-1)$ 可以使用(10)來表示，就可以得到:

$$\begin{aligned}&\text{預測:}\ \hat{\boldsymbol{y}}(n|n-1) = \mathbf{A}(n-1)\hat{\boldsymbol{y}}(n-1|n-1) \\ &\text{濾波:}\ \hat{\boldsymbol{y}}(n|n) = \hat{\boldsymbol{y}}(n|n-1) + \boldsymbol{K}(n)[\boldsymbol{x}(n) - \boldsymbol{H}(n)\hat{\boldsymbol{y}}(n|n-1)]\end{aligned} \tag{19}$$

我們利用了 mMSE 的遞迴估計式成功的得到了一個會隨著時間更新的演算法，現在只差卡爾曼增益矩陣的演算。還有式(14)中的$\mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n-1)$該如何得到，因此需要更新誤差共變異矩陣。

共變異數矩陣的推導，首先我們先定義濾波誤差如下:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{y}}(n|n) &\triangleq \boldsymbol{y}(n) - \hat{\boldsymbol{y}}(n|n) \\ &= \boldsymbol{y}(n) - \hat{\boldsymbol{y}}(n|n-1) - \boldsymbol{K}(n)[\boldsymbol{x}(n) - \boldsymbol{H}(n)\hat{\boldsymbol{y}}(n|n-1)] \\ &= \tilde{\boldsymbol{y}}(n|n-1) - \boldsymbol{K}(n)\mathbf{w}(n)\end{aligned} \tag{20}$$

而濾波誤差的共變異數矩陣如下:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n) &\triangleq \mathrm{E}\{\tilde{\boldsymbol{y}}(n|n)\tilde{\boldsymbol{y}}^H(n|n)\} \\ &= \mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n-1) - \boldsymbol{K}(n)\mathbf{R}_w(n)\boldsymbol{K}^H(n) \\ &= \mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n-1) - \boldsymbol{K}(n)\mathbf{R}_w\mathbf{R}_w{}^{-1}(n)\boldsymbol{H}(n)\mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n-1) \\ &= [\mathbf{I} - \boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{H}(n)]\mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n-1)\end{aligned} \tag{21}$$

式(21)的$\mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n)$就是所謂的後置誤差共變異數(a posteriori error covariance)，而當中的$\mathbf{I}$為單位矩陣。最後，我們需要從$\mathbf{R}_{\tilde{y}}(n-1|n-1)$決定，在時間$n$時的後置預測誤差共變異數，來完成遞迴計算。從式(1)以及(10)中，我們可以得到在時間n的預測誤差:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(n) - \hat{\boldsymbol{y}}(n|n-1) &= \mathbf{A}(n-1)\mathbf{y}(n-1) + \mathbf{B}(n)\boldsymbol{\eta}(n) - \mathbf{A}(n-1)\hat{\boldsymbol{y}}(n-1|n-1) \\ \tilde{\boldsymbol{y}}(n|n-1) &= \mathbf{A}(n-1)\tilde{\boldsymbol{y}}(n-1|n-1) + \mathbf{B}(n)\boldsymbol{\eta}(n)\end{aligned} \tag{22}$$

或

$$\mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n-1) = \mathbf{A}(n-1)\mathbf{R}_{\tilde{y}}(n-1|n-1)\mathbf{A}^H(n-1) + \mathbf{B}(n)\mathbf{R}_{\eta}(n)\mathbf{B}^H(n) \qquad (23)$$

其中初始條件$\mathbf{R}_{\tilde{y}}(-1|-1) = \mathbf{R}_{\tilde{y}}(-1)$，所以得到:

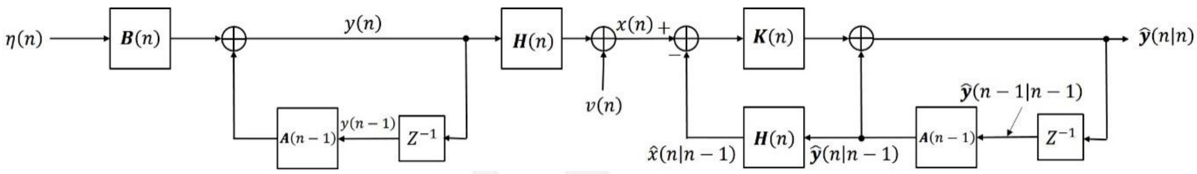
前置誤差共變異數: $\mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n-1)$

$$= \mathbf{A}(n-1)\mathbf{R}_{\tilde{y}}(n-1|n-1)\mathbf{A}^H(n-1) + \mathbf{B}(n)\mathbf{R}_{\eta}(n)\mathbf{B}^H(n)$$

卡爾曼增益: $\boldsymbol{K}(n) = \mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n-1)\boldsymbol{H}^H(n)\mathbf{R}_w{}^{-1}(n)$

後置誤差共變異數: $\mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n) = [\mathbf{I} - \boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{H}(n)]\mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n-1)$

完成了卡爾曼濾波演算法，而方塊流程圖也如下所式:



卡爾曼濾波方塊流程圖

三、 卡爾曼濾波器的程式說明以及程式

以下分為三個部分:一為原理說明、二為程式碼、三為程式說明。

1. 原理說明

假設有一物體在做直線運動，並且有加速度。其中$y_p(n) = y_c(nT)$為物體在第n個樣本點時的真實位置，而T是取樣時間，而$y_c(n)$則為瞬時位置。在紀錄時，紀錄真實位置的紀錄器在紀錄時受到了雜訊$v(n)$影響。因此假設$x(n)$為物體在第n個樣本點時的測量位置。因此我們的觀測模型可以照著式(2)描寫如下:

$$x(n) = y_p(t) + \ v(n), n \geq 0 \qquad (24)$$

而$v(n)$~$WGN(0, \sigma_v^2)$。再來假設$y_v(n) = y_c(nT)$為物體在第n個樣本點時的真實速度，而$y_c(n)$則為瞬時速度，因此我們可以歸納出以下兩式子:

$$y_v(n) = y_v(n-1) + y_a(n-1)\mathrm{T} \qquad (25)$$

$$y_p(n) = y_p(n-1) + y_v(n-1)\mathrm{T} + \frac{1}{2}y_a(n-1)\mathrm{T}^2 \qquad (26)$$

而式(25)、(26)中的$y_a(n-1)$為加速度。式(25)代表時刻n的速度等於前一時刻的速度加上前一時刻到現在時刻的加速度；而式(26)為時刻n的位置於前一時刻的位置加上前一時刻到現在時刻所移動的距離加上加速度所增加的距離。而有趣的是，對式(26)為分會得到式(25)，證明距離變化量為速度。而在此的運動因為受加速度的影響，會導致訊號會有誤差，因此我們可以定義誤差模型$\eta(\mathrm{n}) \triangleq y_a(n-1)$，而$\eta(\mathrm{n}) \sim WGN(0, \sigma_\eta^2)$，因此我們可以將(25)、(26)合併:

$$\boldsymbol{y}(n) \triangleq \begin{bmatrix} y_p(n) \\ y_v(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}(n-1) + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} \eta(\mathrm{n}), n \geq 0 \qquad (27)$$

而式(27)就可與(1)做比對，式(1)中的$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$，最後是將(24)也寫為矩陣，如下:

$$\boldsymbol{x}(n) \triangleq \begin{bmatrix} x_p(n) \\ x_v(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_p(n) \\ y_v(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \end{bmatrix}, n \geq 0 \qquad (28)$$

對應式(2)，$\mathbf{H} = [1 \quad 0]$，到此，信號的狀態模型都已得到。

最後要進行濾波前，就是要確認初始值，也就是 T、σ_v^2、σ_η^2、$y_p(-1)$、$y_v(-1)$。在此，假設取樣時間 T=0.1、$\sigma_v^2 = \sigma_\eta^2 = 0.25$、$y_p(-1) = 0$、$y_v(-1) = 1$。而$y_p(-1)$為 0 代表物體從原點出發，$y_v(-1) = 1$為速度以每秒 1 公尺開始移動。

2. 程式碼

以下為程式碼，其中將卡爾曼濾波器以副程式的方式撰寫。

主程式:

```
clc;clear;close all;
% Target and sensor models
T = 0.1;
A = [1,T; 0,1]; % PHI
B = [T*T/2; T]; % G
vareta =0.25;
H = eye(2);
D = eye(2);
varv1 = .25;
varv2 = .25;
Rv = diag([varv1,varv2]);
```

```
% Generate State and Observation signals
Nt = 100;
eta = sqrt(vareta)*randn(1,Nt); y = zeros(2,Nt);
y(1:2,1) = A*[0;1] + B*eta(1,1);
for n = 2:Nt
    y(1:2,n) = A*y(1:2,n-1) + B*eta(1,n);
end
v1 = varv1^.5*randn(1,Nt);
v2 = varv2^.5*randn(1,Nt);
v = zeros(2,Nt); v(1,:) = v1(:); v(2,:) = v2(:);
for n = 1:Nt
    x(1:2,n) = H*y(1:2,n) + D*v(1:2,n);
end
% A-priori estimates
yhat_ini = [0;1];
R_y = eye(2,2);
% Kalman Filter
[y_hat,GainK,Re_pre,Re_post]= KF(A,B,vareta,H,D,Rv,x,yhat_ini,R_y);
% Extract quantities for plotting
time = (0:Nt)*T;
yp = y(1,:); yp = [0;yp(:)];% True position
yv = y(2,:); yv = [1;yv(:)]; % True velocity
xp = x(1,:); xp = [0;xp(:)]; % Noisy position
xv = x(2,:); xv = [1;xv(:)]; % Noisy velocity
yp_hat = y_hat(1,:); yp_hat = [0;yp_hat(:)]; % Estimated position
yv_hat = y_hat(2,:); yv_hat = [1;yv_hat(:)]; % Estimated velocity
Kg1 = GainK(1,1,:); Kg1 = Kg1(:); % Kalman Gain (1,1)
Kg2 = GainK(2,2,:); Kg2 = Kg2(:); % Kalman Gain (2,2)% for n = 1:Nt
for n = 1:Nt
    Rpre(n) = trace(Re_pre(:,:,n));
    Rpost(n) = trace(Re_post(:,:,n));
end

figure,
subplot(2,1,1);
plot(time,yp,'b',time,xp,'k:',time,yp_hat,'r--','LineWidth',1.5);
axis([time(1),time(end),0,16]);
xlabel('t (sec.)');ylabel('Position (meters)');
title('True, Noisy, and Estimated Positions');
legend('True','Noisy','Estimate','location','southeast');grid;
subplot(2,1,2);
plot(time,yv,'b',time,xv,'k:',time,yv_hat,'r--','LineWidth',1.5);
axis([0,10,-1,4]);xlabel('t (sec.)'); ylabel('velocity (m/sec)');
legend('True','Noisy','Estimate');
title('True, Noisy, and Estimated Velocities');grid;
```

```
figure,
subplot(2,1,1);
plot(time(2:end),Kg1,'bo',time(2:end),Kg2,'rx');axis([0,10,0,1]);
title('Kalman gain');grid;legend('K_p','K_v');xlabel('t (sec.)');
subplot(2,1,2);
plot(time(2:end),Rpre,'ro',time(2:end),Rpost,'bx');
legend('a priori','a posteriori');xlabel('t (sec.)');axis([0,10,0,.5]);
title('Trace of covariance matrix');grid;
```

副程式:

```
function [y_hat,GainK,Re_pre,Re_post] =
KF(A,B,vareta,H,D,Rv,x,yhat_ini,R_y)
y_hat=zeros(2,length(x));
GainK=zeros(1,1,length(x));
Re_pre=zeros(1,1,length(x));
Re_post=zeros(1,1,length(x));
E=eps*ones(2,2);
    for n = 2:length(x)
        yhat=A*yhat_ini;
        xhat=H*yhat;
        Rty=A*R_y*A'+B*vareta*B'+E;
        Rw=H*Rty*H+Rv+E;
        K=Rty*H'/Rw;
        yhat_ini=yhat+K*(x(1:2,n)-xhat);
        R_y=(D-K*H)*Rty;
        y_hat(1:2,n)=yhat_ini;

        GainK(1:2,1:2,n)=K;
        Re_pre(1:2,1:2,n)=Rty;
        Re_post(1:2,1:2,n)=R_y;
    end
end
```

3. 程式說明

程式大致可以分為三個部分:第一個部分是初始值的設定，初始值設定包含前述的已知數據，還包含了一些需要預設的相關矩陣；第二部分為狀態模型，狀態模型的設定就為式(27)及(28)的設定；第三部分就是做濾波。而結果將會在下頁做討論。

四、 卡爾曼濾波器的程式執行結果

以下先以預設的數值作執行結果，再來會分別改變雜訊來探討濾波的結果。在每個數據的第一張圖中，實線代表真實信號$\boldsymbol{y}(n)$，點線代表受到量測雜訊的信號，也就是$\boldsymbol{x}(n)$；而最後虛線代表估計值，也就是$\hat{\boldsymbol{y}}(n)$。

$$\sigma_v^2 = \sigma_\eta^2 = 0.25$$

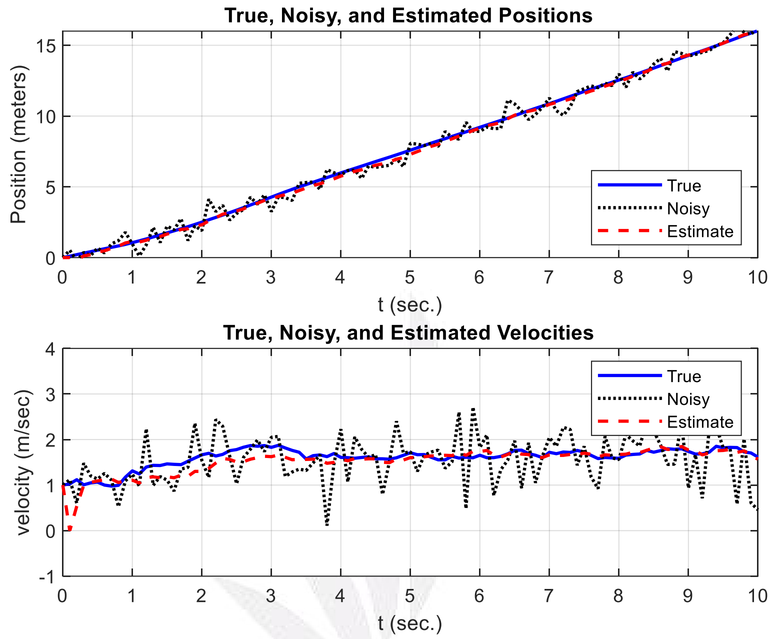


圖 1

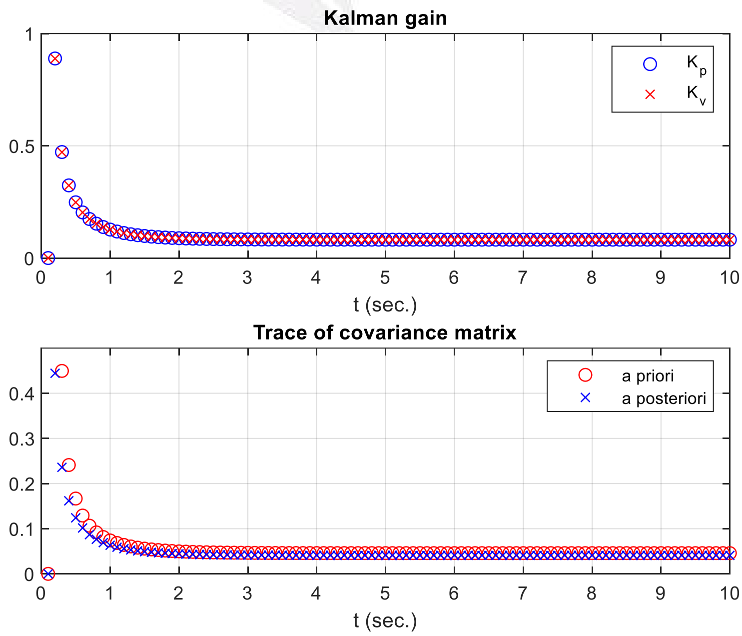


圖 2

圖 1 中可以看到雖然初始速度為每秒 1 公尺，但是因為加入了變異數為

0.25 的加速度，導致在速度對時間圖中，真實速度不會固定在每秒 1 公尺，讓位置對時間圖不會是斜直線。再來加上了變異數為 0.25 的測量雜訊，讓速度跟真實速度有極大的誤差，所以位置也無法看到真實位置，為了要還原回原始信號，通過了卡爾曼濾波器，可以看到最後估計出來的數值跟真實的十分接近。

圖 2 展示了位置以及速度的卡爾曼增益以及前置、後置誤差共變異數。從圖 2 可以看到，在經過幾次的更新後，數值都趨於穩定，而後置誤差都會比前置誤差共變異數的值還要小。

$$\sigma_v^2 = 0.25, \sigma_\eta^2 = 0$$

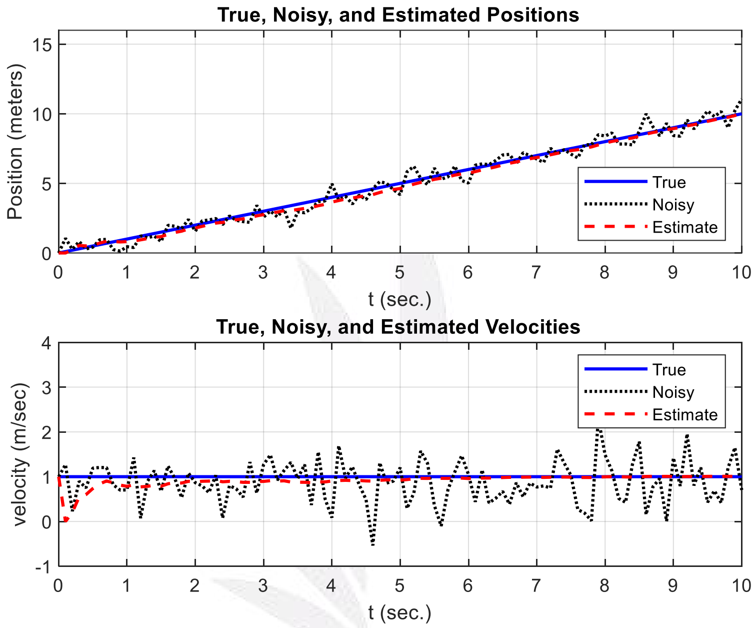


圖 3

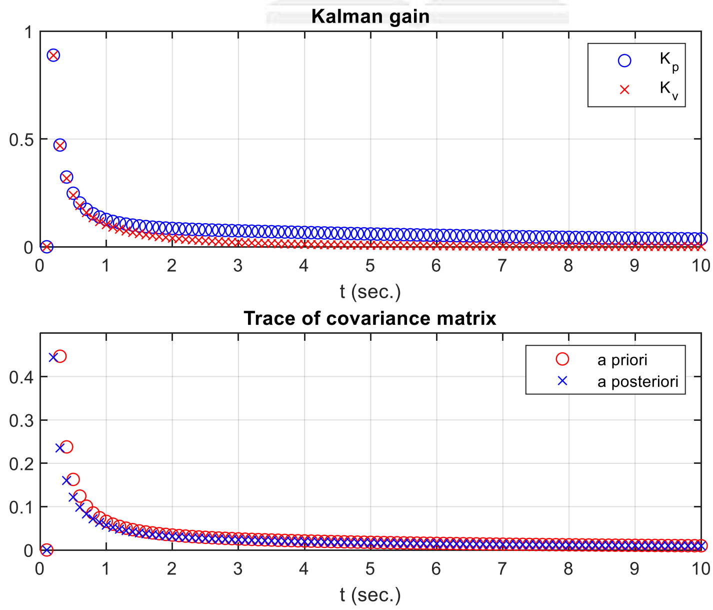


圖 4

在圖 3 中，因為有關加速度的σ_η^2為 0，因此真實速度只保持每秒 1 公尺，導致在真實位置上呈現了一條斜率正的斜直線，而從受到雜訊到經過濾除後的估計值也如預期的一樣，有讓估計信號趨近於真實值。

在圖 4 中，速度的卡爾曼增益在最後趨近於 0，代表誤差趨近於一個定值。

$$\sigma_v^2 = 0.25, \sigma_\eta^2 = 25$$

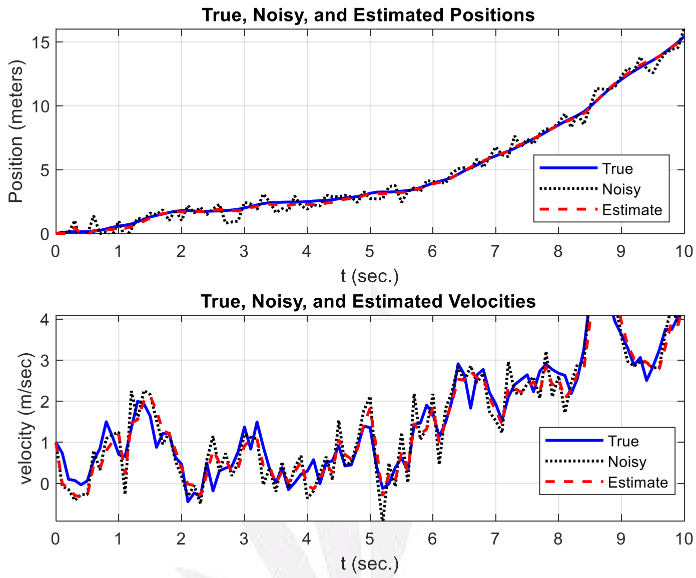


圖 5

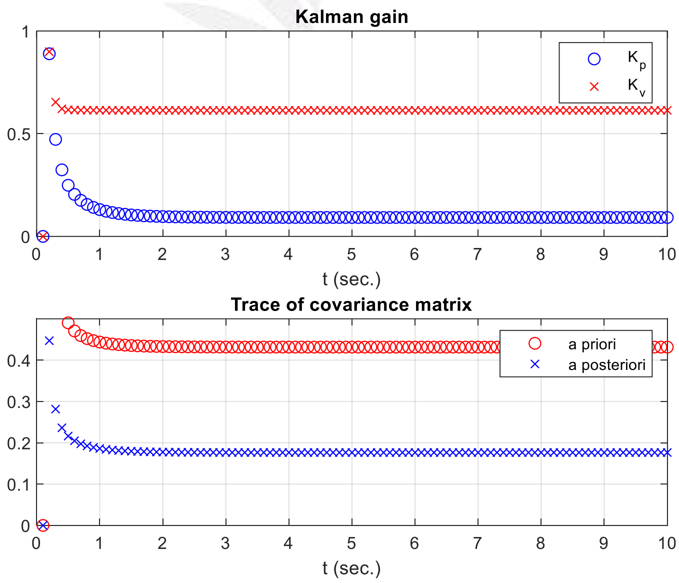


圖 6

從圖 5 可以看到，當加速度的變異量大，跟圖 1 及圖 3 比起來，圖 5 的線性度極低，不過還是可以有辦法預測到數值。

而圖 6 因為加速度變異變大，讓速度的卡爾曼增益明顯偏大，也讓前置誤

差共變異數變大。

$$\sigma_v^2 = 25, \sigma_\eta^2 = 0.25$$

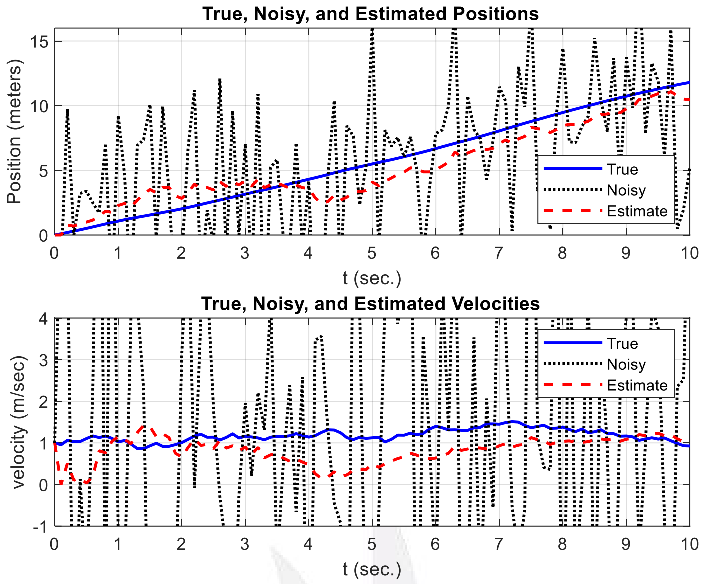


圖 7

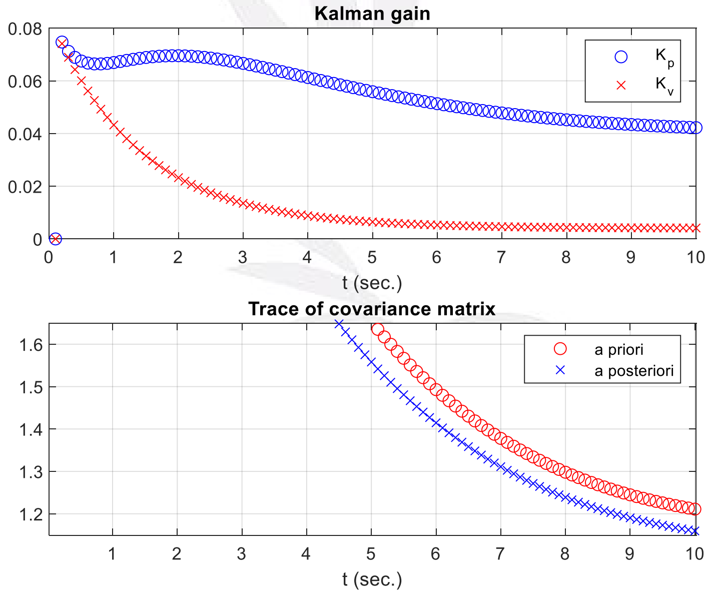


圖 8

在圖 7 中，當測量雜訊變異量跟圖 1 的比變大，可以看到卡爾曼濾波器也可以成功還原信號。

圖 8 中，因為測量雜訊變異量變大，導致真實位置的卡爾曼增益變大，也讓誤差共變異數花了較長的時間收斂。

從以上幾個結果來看可以發現，當加速度雜訊越大，有關速度的卡爾曼增益以及前置誤差共變異數會越大；而當測量雜訊越大，有關位置的卡爾曼增益會越大，而對於誤差共變異數而言，收斂速度會越來越慢。

五、 結論及心得

要設計卡爾曼濾波器不難，首先要先知道信號的狀態模型、觀測模型，以及初始條件，再來在照著以下順序就可做卡爾曼濾波:第一，計算信號預測$\hat{\mathbf{y}}(n|n-1)$；第二，計算前置誤差共變異數矩陣$\mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n-1)$；第三，計算卡爾曼增益$\boldsymbol{K}(n)$；第四，計算後置誤差共變異數矩陣$\mathbf{R}_{\tilde{y}}(n|n)$；第五，計算更新信號$\hat{\mathbf{y}}(n|n)$。基本上，卡爾曼濾波器的計算步驟如前所示，但是會依照著輸入信號的不同形式而有所修改，所以要了解其中的運作，並且依照情境不同而做演算法的更正。

六、 參考文獻

[1] D. G. Manolakis, V. K. Ingle, and S. M. Kogon, *Statistical and Adaptive Signal Processing*, McGraw-Hill, 2000.

[2] T. K. Moon, W. C. Stirling, *Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing,* Prentice-Hall, 2000.

[3] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Pearson, 2014.

[4] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, Pearson, 2010.