最小均方演算法之實現

Implementation of Least-Mean-Square Algorithm

作者：林伯彥

系級：通訊四乙

學號：D0550129

開課老師：林育德

課程名稱：高等生醫信號處理

開課系所：自動控制工程學系碩士班

開課學年：108 學年度 第二學期

中文摘要

本篇報告以實現最小均方演算法為主，並且將其應用在生醫信號中，來濾除心電信號中之電力線干擾。在閱讀此篇報告之前，建議先閱讀[3]中的內容，先了解其原理以及如何應用在生醫信號中，而如果像要更加瞭解演算法的各種不同樣貌，可以在閱讀[1]的內容。在這篇報告中，在驗證部分使用的是 MATLAB (2018b, MathWorks®, Inc., USA)。

關鍵字：最小均方演算法、非穩態信號處理、統計信號處理、電力線干擾、消雜訊濾波，心電圖信號。

Abstract

This report implements the Least-Mean-Square algorithm, and is applied to biomedical signal processing to suppress the power-line interference in Electrocardiogram signal. Before you read this report, I suggest to read reference [3] to understand how this algorithm can work and how to use in biomedical signal. If you wanted to know more about this algorithm, you also can read reference [1] to improve your capability. In this report, all of computer experiments were conducted in MATLAB (2018b, MathWorks®, Inc., USA).

Keyword：Least-Mean-Square (LMS) Algorithm, Nonstationary Signal Processing, Statistical Signal Processing, power-line interference (PLI), noise canceler, Electrocardiogram (ECG).

目　次

一、　介紹

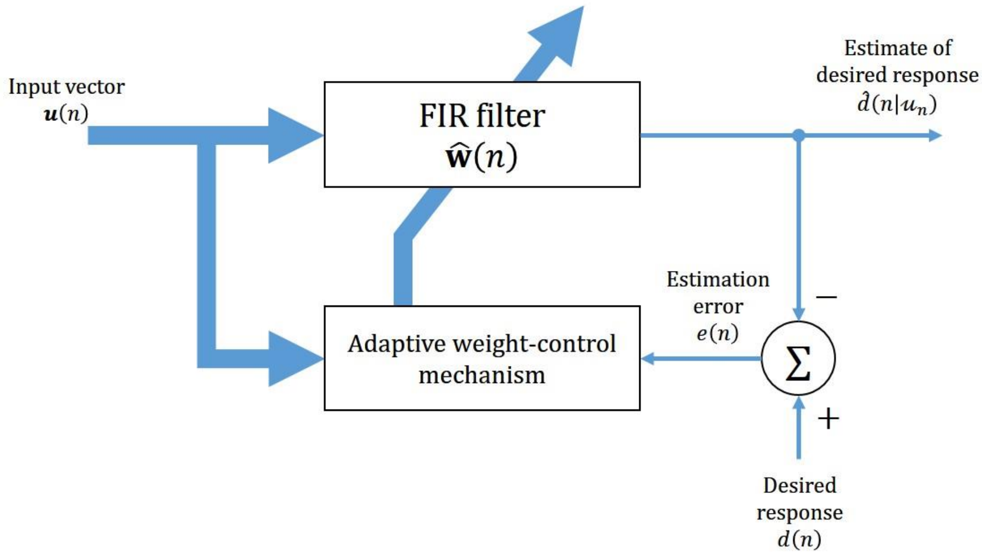
LMS(Least-Mean Square)演算法是隨機梯度下降法(stochastic gradient descent, SGD)的應用之一，而且是最廣為人知的一種演算法，而此演算法是由 Widrow 以及 Hoff 在 1960 年時發現的。而此演算法具有以下的特徵:

(1) 架構非常簡單，也就是計算複雜度只隨著 FIR 濾波器維度線性增加。
(2) 不像維納濾波器(wiener filter)，此演算法在計算時不需要先知道信號的統計特性。
(3) 在未知的環境中具有強大的決定性。
(4) 此演算法不需要計算自相關矩陣，因此比起其他的演算法還要簡單，例如 RLS。

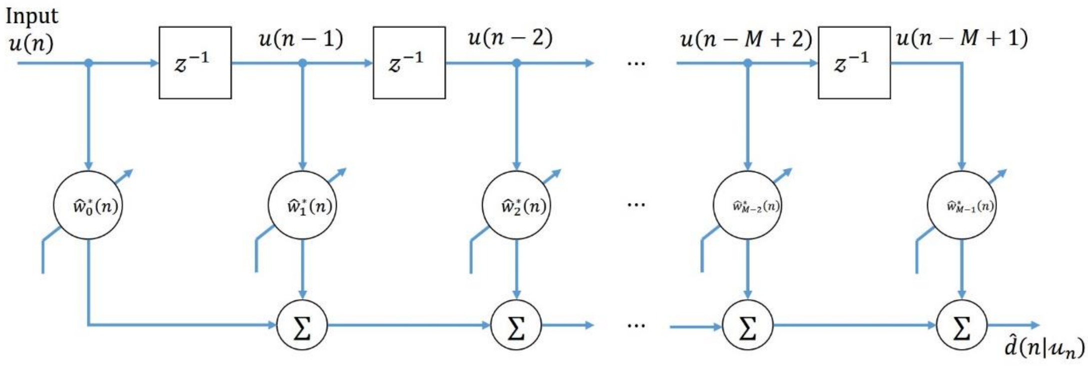
從以上的特性可以知道為什麼 LMS 演算法是如此的受歡迎。

圖 1(a)為 LMS 演算法濾波器的方塊圖，可以將此方塊圖簡單的分成三個部分:

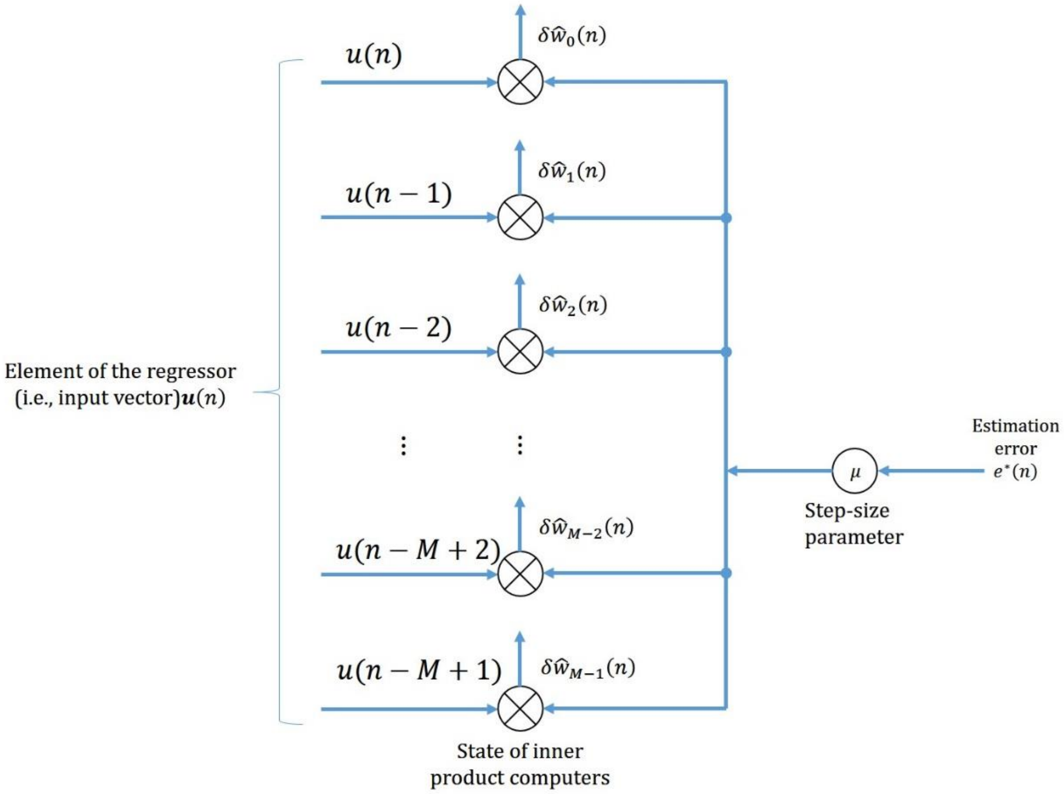
(1) FIR 濾波器，使用輸入信號$\boldsymbol{u}(n)$估測想要的信號，即$\hat{d}(n|u_n)$，而符號u_n代表輸入向量$\boldsymbol{u}(n)$。其中濾波器內部則如圖 1(b)所示。
(2) 比較器，是用來將信號$d(n)$與 FIR 濾波器輸出結果$\hat{d}(n|u_n)$相減，而此結果則較估測誤差，用符號$e(n)$表示。
(3) 適應性權重控制器是一個藉由$e(n)$來調整 FIR 濾波器裡面的權重的運算器。也就是(c)所示。



(a)



(b)



(c)

圖 1

最後，LMS 演算法可以由下列式子來實現

$$e(n) = d(n) - \hat{\boldsymbol{w}}^H(n)\boldsymbol{u}(n)$$
$$\hat{\boldsymbol{w}}(n+1) = \hat{\boldsymbol{w}}(n) + 2\mu\boldsymbol{u}(n)e^*(n)$$

其中$d(n)$為時間n的觀察到的信號；$\boldsymbol{u}(n)$為$\mathrm{M}\times 1$的參考信號；$\hat{\boldsymbol{w}}(n)$為$\mathrm{M}\times 1$的權重向量；μ為步距，大小為$0 \le \mu \le \frac{1}{\lambda_{max}}$，$\lambda_{max}$則為由$\boldsymbol{u}(n)$所計算出的自相關

函數的特徵值。

二、 程式碼

```
clc;clear;close all;
Fs = 500;M=10;
fid = fopen('D:\project\code\ECG_Signal\e3a.txt','r');
ECG= fscanf(fid, '%f')';
ECG=ECG(1:200*500);
T=(0:length(ECG)-1)/Fs;
Ref=.2*cos(2*pi*60*T);
Xn=ECG+Ref;
W=zeros(M,1);
EE=zeros(1,length(Xn));
ww=zeros(1,length(Xn));
figure,
subplot(211),
plot(T,Xn);axis([0 8 -1 2]);grid;
xlabel('time(sec.)'),ylabel('amplitude(mV.)');
[h,w]=FFT(Xn);
subplot(212),
plot(w/(2*pi)*Fs,(abs(h)));axis([0 250 0 .04]);grid;
xlabel('frequency(Hz)'),ylabel('amplitude(mV.)');
%% LMSAlgorithm
for ii=M:length(Xn)
  R=Ref(ii:-1:ii-M+1)';
  e=Xn(ii)-W'*R;
  ww(ii)=W'*R-Ref(ii);
  W=W+0.01*2*e*R;%weight
  EE(ii)=e;
end
figure,
subplot(211),
plot(T,EE);axis([0 8 -1 2]);grid;
xlabel('time(sec.)'),ylabel('amplitude(mV.)');
[h,w]=FFT(EE);
subplot(212),
```

```
plot(w/(2*pi)*Fs,(abs(h)));axis([0 250 0 .04]);grid;
xlabel('frequency(Hz)'),ylabel('amplitude(mV.)');
%% FileClose
fclose(fid);
```

三、 結果

在此部分將會展示使用使演算法所濾波的結果，在這裡使用的例子為心電信號之電力線干擾消除，在展示結果之前，先給定以下條件:

$$d(n) = m(n) + v(n) \quad (1)$$
$$= m(n) + A_v cos(2\pi f_v n) \quad (2)$$
$$u(n) = A_u cos(2\pi f_u n)$$

其中$m(n)$為未受干擾的心電信號，$v(n)$代表的是電力線干擾信號，也就是(2)中的第二項。而在(2)中，A_v為電力線干擾振幅；f_v為電力線干擾頻率，在此為60Hz。再來是參考信號$u(n)$，其中數值與(1)中$v(n)$相似，在此假設相等。再來是誤差式

$$e(n) = d(n) - \widehat{\boldsymbol{w}}^H(n)\boldsymbol{u}(n) \quad (3)$$

其中$\widehat{\boldsymbol{w}}^H$為估測權重的共軛轉至，其中(3)中$\widehat{\boldsymbol{w}}^H(n)\boldsymbol{u}(n)$與$\hat{d}(n|u_n)$相同。若$\hat{d}(n|u_n)$與$v(n)$相等，則

$$e(n) = m(n) + v(n) - v(n) \quad (4)$$
$$e(n) = m(n)$$

因此，如果經由參考信號運算出的$\hat{d}(n|u_n)$越接近真實干擾信號，則相減出來的誤差會越接近真實的新電信號。

在結果中，除了直接從時域以及頻率域觀察演算法結果外，在此也引用了[2]中的 MSE 演算法來觀察濾波器階數、布距大小，以及干擾震幅大小對濾波器所造成的性能會有何變化，而[2]中 MSE 演算法定義如下:

$$MSE = \frac{\sum_{n=0}^{L-1}\left(d(n) - \hat{d}(n)\right)^2}{L} \quad (5)$$

(5)代表在時間長度 L 中，將原始信號與經過濾波器的信號相減、平方、累

加 L-1 後除上時間長度 L。如果經過(5)運算後的數值越小，代表濾波器的性能越好，反之，則越差。除了(5)，也使用了學習曲線(learning curve)來觀察濾波器的收斂速度，在此使用的不是$e(n)$，是$u(n)-\hat{\boldsymbol{w}}^{H}(n)\boldsymbol{u}(n)$的結果，因此跟[1]中不太一樣，不過也具有相同的趨勢。

以下為實驗結果。

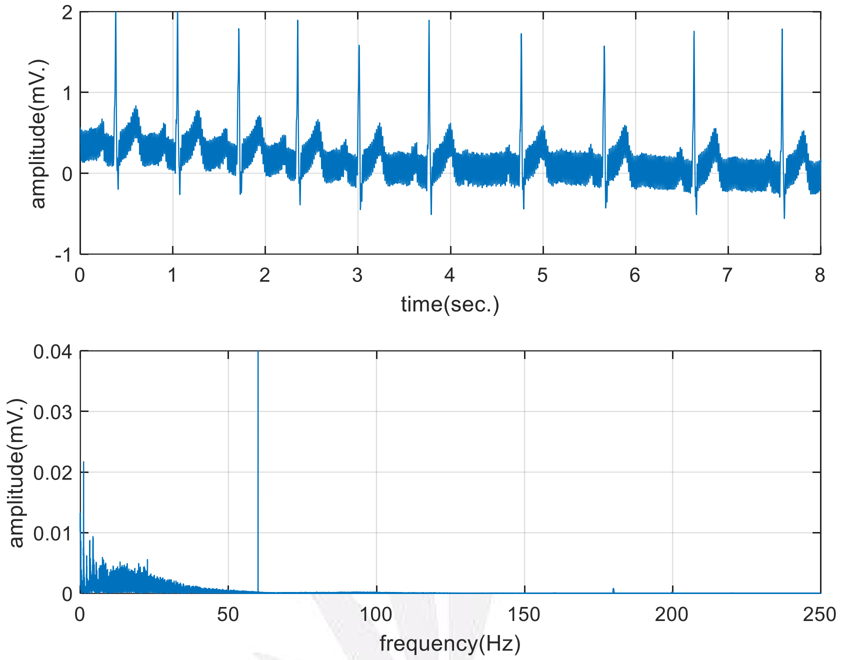


圖 2

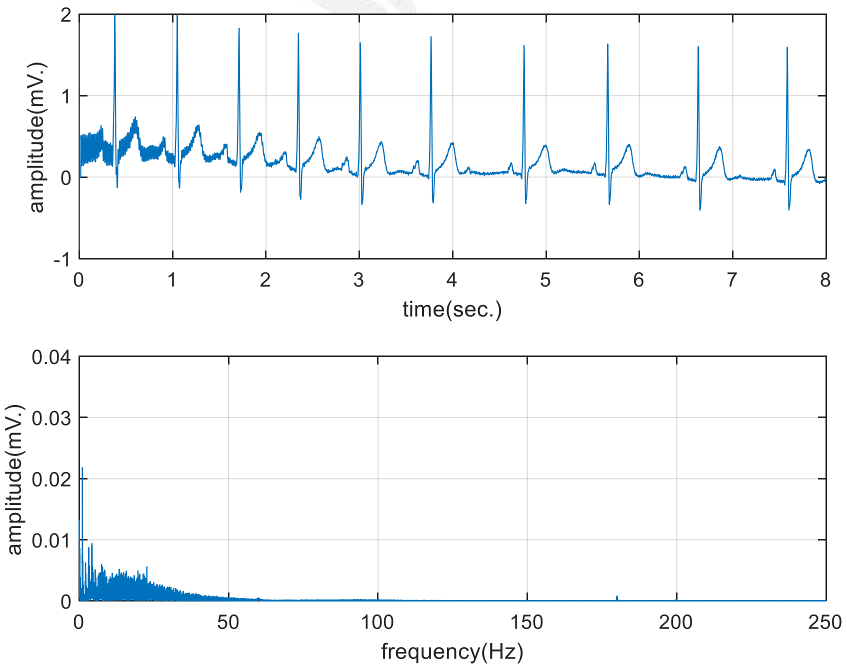


圖 3($\mu=0.01$)

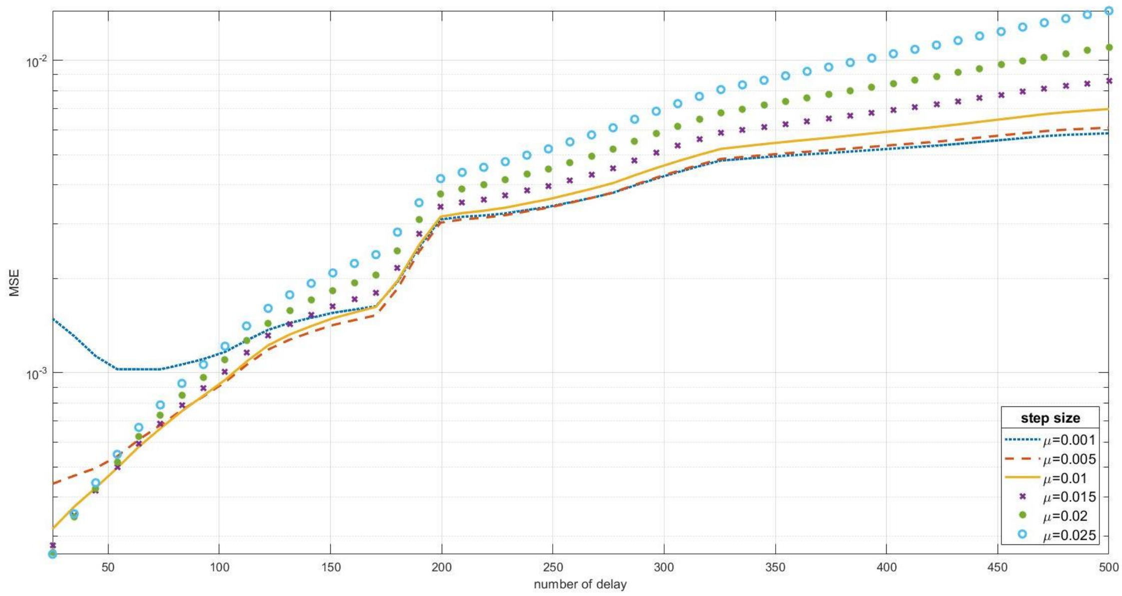


圖 4($A_v = A_u = 0.2$)

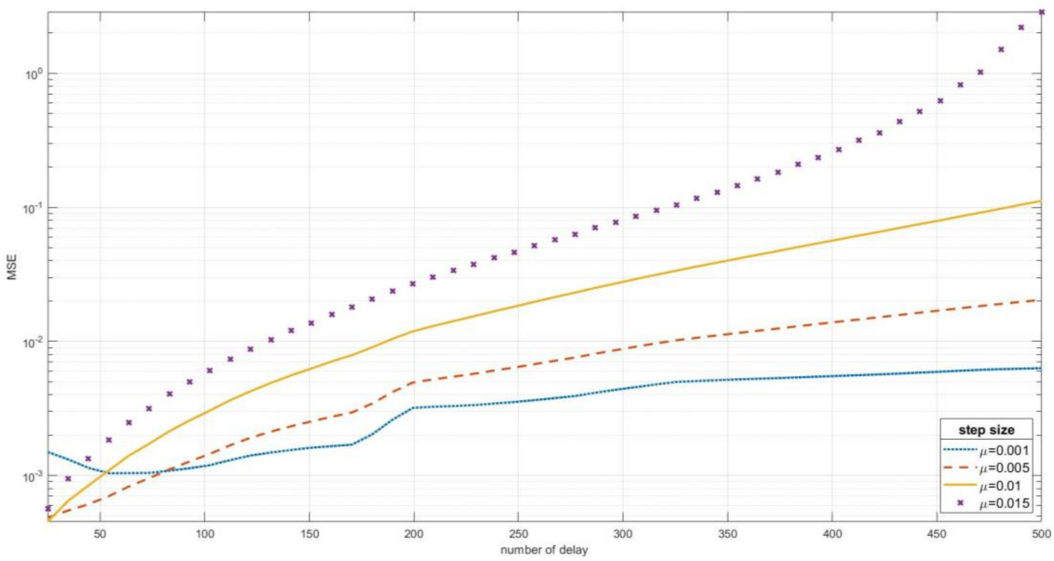


圖 5($A_v = A_u = 0.5$)

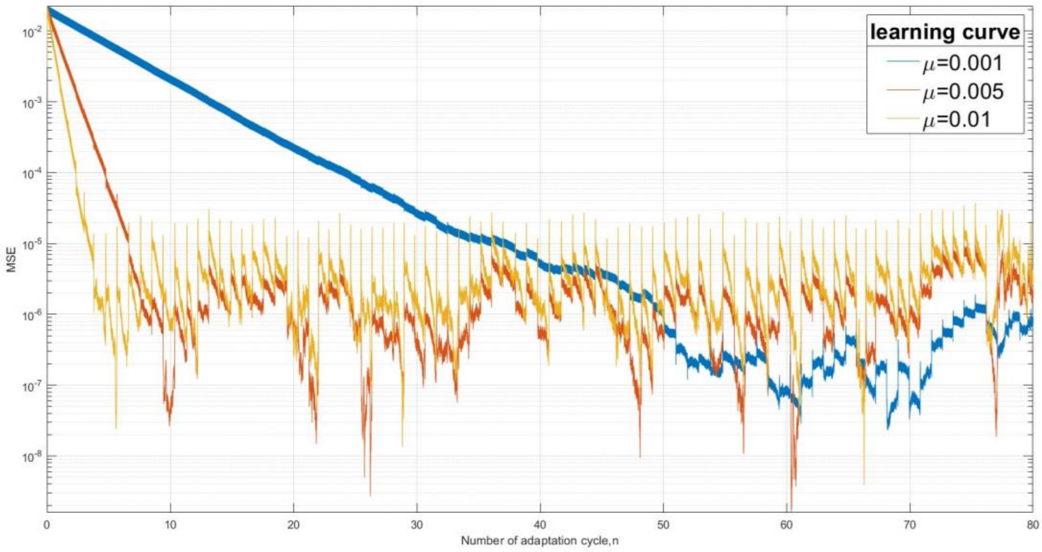


圖 6

從圖 2 及圖 3 可以看到，受干擾的心電信號經過 LMS 演算法後，成功的將干擾濾除。而在圖 4 可以看到，在相同的延遲下，當μ越大，則其 MSE 值也越大；另外，當μ固定，當使用的延遲越多，MSE 也越大；當要達到相同的 MSE，μ越大，延遲越小，反之亦然。圖 5 以及圖 4，可以發現震幅改變不太會影響到其數值。圖 6 可以很明顯看到，μ越小，收斂速度越慢，另外此圖的 x 軸為濾波週期，在此應再乘上取樣頻率在除上階數，不過不會改變整體趨勢。不過如果照著現在的 x 軸對應到的就是時間，可以看到當μ為 0.001 時，花了 40 秒的時間其 MSE 才收斂，因此在選擇μ的大小時必須慎選。

四、　參考資料

[1] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Pearson, 2014.

[2] K. M. Chang, “Arrhythmia ECG Noise Reduction by Ensemble Empirical Mode Decomposition”, *Sensors in Biomechanics and Biomedicine*, vol. 10, issue 6, pp. 6063-6080, 2010.

[3] R. M. Rangayyan, *Biomedical Signal Analysis,* Jon Wiley & Sons, 2015.