

最適分數階 PID 時延控制器之設計

呂政芳
煉製研究所
中國石油股份有限公司
嘉義 60036, 台灣
leujf@rmrc.gov.tw

黃奇
化學工程學系
義守大學
高雄 84041, 台灣
chyi@isu.edu.tw

摘要

本研究針對 SISO 回饋系統提出分數階 PID 時延控制器的架構。相對於一般的 PID 時延控制器，吾人將其中之正回饋迴路的積分器，由整數階擴展至分數階。再透過微分演化法的搜尋，以得最適 ISE 或 ITSE 的分數階 PID 時延控制器的參數。文中所舉的例子展現此新型之控制器的性能，確實能優於整數階者。

1. 前言

所謂的 PID 時延控制器 (PID-deadtime controller)，即是在積分器部分插入一個正回饋時延元件，以補償程序的時延現象[1]，其主要的目的，即在於解決傳統 PID 控制器對於長時延程序控制的不足，而事實上，其形成之轉移函數與 Smith 預測器 (Smith Predictor) 所構成的內部模式控制器 (Internal model controller; IMC) 是相當接近的。關於 PID 時延控制器、IMC 及 PID 等三類型的控制器，Shinskey 於[1]文中做過甚為詳細的比較與探討；認為在解決含長時延甚至分散時延 (distributed deadtime) 的程序控制問題時，PID 時延控制器的效益非常顯著，反觀 IMC 的控制情形在某些應用上則不甚理想，特別是對於積分[2]和不穩定程序[3]而言，典型的 Smith 預測器便無法作有效的控制。

此外，相較 IMC 不同的特色，PID 時延控制器能進行類似 PID 控制器的參數調諧程序，例如使積分誤差最小化的最適調諧方法。對此，文獻[4]曾提出最適 ISE 之 PID 時延控制器的調諧法則。

另一方面，隨著各種新型電路元件的合成與開發[5, 6]，分數階控制器，包括分數階 PID 控制器，在實際的應用上愈趨明朗，也因此帶動起相關研究熱潮[7-14]。不論是從頻域規格[7-12]，或由時域規格著手[13-14]，已有多種分數階控制器之設計方法獲得探討，且證實其性能能超越整數階者。在[14]中，我們同時考慮頻域和時域規格，設計出滿足強韌條件，且具最適 ISE 之分數階 PID 控制器。而關於分

數階系統的時域模擬問題，也在[13,15]獲得討論。

在本文中，我們考慮如何將 PID 時延控制器，推展至分數階的領域，探討其性能提升情形。於是，在 Shinskey 的 PID 時延控制架構下，將其積分器的階次擴展至分數階，並配合其他控制器增益值與時間常數，作為最適化的可調參數組。我們將使用微分演化法 (Differential Evolution; DE) 搜尋最佳的參數組合，而所選擇的性能指數為 ISE 或 ITSE，以作為最適化之標準。而此時域性能函數的計算，將使用[16]中所開發之演算技術，以兼顧數值精確性與效率性，並能同步由頻域應答結果 (即應用 Nyquist 穩定性準則) 判定 DE 所搜尋的參數組是否會影響系統之穩定性變化。

2. 問題陳述

所提之分數階 PID 時延控制器架構如圖 1 所示，我們將其積分器階次表示為 δ ，其中 $\delta \in \mathbb{R}$ 。若 $\delta = 1$ ，則為 Shinskey 所提之 PID 時延控制，可視為分數階者之特別情況

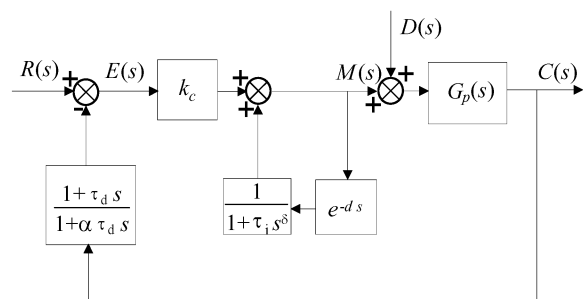


圖 1. 分數階 PID 時延控制架構

於是，控制變數 $C(s)$ 至操縱變數 $M(s)$ 之轉移函數則成爲

$$\frac{M(s)}{C(s)} = -k_c \left(\frac{1 + \tau_d s}{1 + \alpha \tau_d s} \right) \left(\frac{1 + \tau_i s^\delta}{1 + \tau_i s^\delta - e^{-ds}} \right) \quad (1)$$

而設定點 $R(s)$ 與操縱變數 $M(s)$ 的關係則如下

$$\frac{M(s)}{R(s)} = k_c \left(\frac{1 + \tau_i s^\delta}{1 + \tau_i s^\delta - e^{-ds}} \right) \quad (2)$$

其中， d 爲所控制器時延，通常其設定值與程序時延相等。 k_c 、 τ_i 與 τ_d 各爲增益值、積分時間與微分時間常數，連同 δ 都可視爲待決定的控制器參數組合。而濾波器常數 α ，一般給定爲 0.1 即可。而對於設定點爲單位步階變化時； $R(s) = \frac{1}{s}$ ，此 SISO 回饋系統的誤差 $e(t)$ ，所對應之 Laplace 轉移函數 $E(s)$ 可表示爲

$$E(s) = \mathcal{L}\{e(t)\} \\ \frac{1}{s} \frac{k_c G_p(s) (\tau_i s^\delta + 1) (1 - \alpha) \tau_d s + (\tau_i s^\delta + 1 - e^{-ds}) (1 + \alpha \tau_d s)}{k_c G_p(s) (\tau_i s^\delta + 1) (1 + \tau_d s) + (\tau_i s^\delta + 1 - e^{-ds}) (1 + \alpha \tau_d s)} \quad (3)$$

其中， $G_p(s)$ 爲程序之轉移函數。在隨後的章節中，將使用式(3)計算 ISE； J_0 或 ITSE； J_1 等誤差積分值，即

$$\begin{cases} J_0 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{2j\pi} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(s) E(-s) ds \\ J_1 = \int_0^{\infty} t e^2(t) dt = \frac{1}{2j\pi} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{dE(s)}{ds} E(-s) ds \end{cases} \quad (4)$$

其中， $j = \sqrt{-1}$ 。以(4)之計算結果，作爲控制參數： k_c 、 τ_i 、 τ_d 與 δ 的微分演化法搜尋標準。以下，我們將介紹如何進行(4)的數值計算，且同時判斷閉環路系統的穩定性。

3. ISE/ITSE 之計算與穩定性測試之數值方法

在設計使得性能指標 ISE/ITSE 爲最小之最適穩定分數階 PID 時延控制器的過程中，將包含穩定性的測試與性能指標 J_0 或 J_1 的計算。對於分數階控制器和（或）程序，一般而言，目前尚缺乏穩定性測試及 ISE/ITSE 性能指標計算的解析方法，所以我們仍將採用數值方式解決這個問題。爲此，本研究將引用 Hwang 等人[16]所提出的數值方法，以計算精確的誤差積分性能指標。而使用此數值方法的附加優點，在於當吾人計算性能指標時，穩定性的測試可以被同時完成。值得一提的是，此方

式也成功地應用至最適 ISE 分數階 PID 控制器之設計[14]。

若一回饋控制系統爲漸進穩定，也就是說，當 $t \rightarrow \infty$ 時 $e(t) = 0$ ，按照 Parseval's 定理，積分值 J_0 或 J_1 可以用 $e(t)$ 的轉移函數表示之，如式(4)所示。令 $s = j\omega$ ，(4)的複變數積分便可以表示成

$$\begin{cases} J_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega) E(-j\omega) d\omega \\ J_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left. \frac{dE(s)}{ds} \right|_{s=j\omega} E(-j\omega) d\omega \end{cases} \quad (5)$$

就如式(5)所示，上述的瑕積分（improper integral）藉著以下的變數變換步驟，能轉換成確定型式（definite）

$$\omega = \tan \frac{\theta}{2} \quad (6)$$

此變數變換將可推導出

$$\begin{cases} J_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Re \left\{ E(j \tan \frac{\theta}{2}) E(-j \tan \frac{\theta}{2}) \right\} \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)} \\ J_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Re \left\{ \left. \frac{dE(s)}{ds} \right|_{s=j \tan \frac{\theta}{2}} E(-j \tan \frac{\theta}{2}) \right\} \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)} \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\Re\{\cdot\}$ 表示實部。因此， J_0 或 J_1 便可由起始值問題的求解中獲得。

$$\begin{cases} \frac{dJ_0(v)}{dv} = \frac{1}{\pi} \Re \left\{ E(j \tan \frac{v}{2}) E(-j \tan \frac{v}{2}) \right\} \frac{1}{(1 + \cos v)} \\ \frac{dJ_1(v)}{dv} = \frac{1}{\pi} \Re \left\{ \left. \frac{dE(s)}{ds} \right|_{s=j \tan \frac{v}{2}} E(-j \tan \frac{v}{2}) \right\} \frac{1}{(1 + \cos v)} \end{cases} \quad (8)$$

其中，起始值爲 $J_0(0) = 0$ ， $J_1(0) = 0$ 。

上述的微分方程式，可利用可調節積分步階並控制準確性之數值演算法，精確地由 $v = 0$ 積分至 $v = \pi$ 。假如圖 1 的回饋控制系統爲漸進穩定，則性能指標便可以求得 $J_0 = J_0(\pi)$ ， $J_1 = J_1(\pi)$ 。值得注意的是，在求解微分方程式(8)時，必須對於 $\theta \in [0, \pi]$ 進行函數 $E(j \tan \frac{\theta}{2})$ 的計算，因此，能使我們同時建構出開環路轉移函數 $L(s)$ ：

$$L(s) = k_c \left(\frac{1 + \tau_d s}{1 + \alpha \tau_d s} \right) \left(\frac{1 + \tau_i s^\delta}{1 - e^{-ds}} \right) G_p(s) \quad (9)$$

的尼氏圖。接著，再根據尼氏穩定性準則（Nyquist criterion）[17]，使得圖 1 的回饋控制系統閉環路穩定性，將可由 $L(s)$ 右半平面的極點數目，以及 $L(j\omega)$ 隨 ω 沿包圍整個右半

平面的緊閉半圓 C_R ，而逆時針包圍 $(-1,0)$ 的圈數來進行判斷。

4. 微分演化法搜尋最適控制參數組合

由前文得知，吾人可令求取最適 PID 時延控制器設計問題的代定變數為： k_c 、 τ_i 、 τ_d 與 δ 。而在本節中，我們將說明如何使用搜尋技術求得最佳參數組： k_c^* 、 τ_i^* 、 τ_d^* 與 δ^* ，使得定義於式(4)之積分性能指數 J_0 或 J_1 能夠最小化。為了確保所搜尋的參數組是全域最佳值，我們將引用 Price 與 Storn[18]所提出的微分演化演算法 (differential evolution; DE)，配合區間收縮機制 (region contraction) 求得最佳參數組。

令參數 $\mathbf{p} = (k_c, \tau_i, \tau_d, \delta)$ 的搜尋區域設為 $\mathbf{P} = [k_c, k_c] \times [\tau_i, \tau_i] \times [\tau_d, \tau_d] \times [\delta, \delta]$ ，且對於 DE 運算變數 (x_1, x_2, x_3, x_4) 的正規化搜尋空間為 $\mathbf{U} = [0,1]^4$ 。由搜尋空間之點 (x_1, x_2, x_3, x_4) ，映射至參數區域之點 $(k_c, \tau_i, \tau_d, \delta)$ 的關係式將給定為

$$\begin{aligned} k_c &= \underline{k_c} + x_1(\overline{k_c} - \underline{k_c}) \\ \tau_i &= \underline{\tau_i} + x_2(\overline{\tau_i} - \underline{\tau_i}) \\ \tau_d &= \underline{\tau_d} + x_3(\overline{\tau_d} - \underline{\tau_d}) \\ \delta &= \underline{\delta} + x_4(\overline{\delta} - \underline{\delta}) \end{aligned} \quad (10)$$

因此，存在一 PID 時延控制器參數： \mathbf{p} ，對應到搜尋空間中之點 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 。我們將此對應點註記為 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 。所以，在搜尋空間中每個點 (x_1, x_2, x_3, x_4) 的價值 (cost)，依照所選定的性能指數，可指定為 $c(\mathbf{x}) = J_0(\mathbf{p}(\mathbf{x}))$ 或是 $c(\mathbf{x}) = J_1(\mathbf{p}(\mathbf{x}))$ 。

若要從整個 $(k_c, \tau_i, \tau_d, \delta)$ 的參數空間中，判斷出穩定區間是相當困難的，所以不可避免地，所指定的參數搜尋區域 \mathbf{P} 內，很有可能存在使閉環路系統不穩定的控制器參數點。對於存在於搜尋區域內，卻對應至無法穩定閉環路之控制器的參數點 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ ，其相關的性能指數則將給定一夠大的數值。接下來，我們將對微分演化演算法[18,19]的運算過程，做個介紹與說明。

由於微分演化演算法主要藉著一待選解值 (candidate solution) 族群 (population) 的突變 (mutation)、交配 (recombination) 與選擇 (selection) 來進行運作，因此，我們必須先

要產生一個起始族群。該起始族群，為 N_p 向量 $\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}, x_{i,4})$ ， $i = 0, \dots, N_p - 1$ ，通常是由多立方體 \mathbf{U} 中隨機選取 N_p 個點所產生。而對應著每個解值向量 (candidate vector)； \mathbf{x}_i ，便是其價值 (cost) 或是性能指標； $\text{cost}[i] = c(\mathbf{x}_i)$ ，用以評估其優劣程度。起始族群可以透過突變、交配與選擇等程序，演化出更為優良的下一代。其中，突變程序可以向尚未搜尋之區域進行新的探索。早期的演化策略中，須加上 zero-mean Gaussian noise 以產生向量的突變運算，而 DE 演算法則採用更為方便的途徑，即由族群本身衍生正規化的擾動 (normalized perturbations)，來進行突變程序運作。根據這個原理，一向量 \mathbf{x}_c 的突變程序，首先是從目前的族群中隨機選定的二個向量 \mathbf{x}_a 和 \mathbf{x}_b ，然後定義出一微分向量 $\mathbf{d} = (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)$ ，最終再加進權衡差距 (weighted difference) $\mathbf{w} \cdot \mathbf{d}$ 於 \mathbf{x}_c 上。以數學式表示，該突變向量可以下式表示之

$$\mathbf{x}_c' = \mathbf{x}_c + \mathbf{w} \cdot \mathbf{d}$$

其中，權衡因子 (weighting factor) \mathbf{w} 為使用者提供之常數，一般是介於(0.4, 1.0)之間。

另一個在搜尋空間中產生新樣品點的方法，即為交配程序。對於二個給定的解值向量 $\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}, x_{i,4})$ 和 $\mathbf{y}_i = (y_{i,1}, y_{i,2}, y_{i,3}, y_{i,4})$ ，交配運算程序將能產生一新的向量 $\mathbf{z}_i = (z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}, z_{i,4})$ ，其中若 $b_i = 0$ ，則 $z_i = x_i$ ；若 $b_i = 1$ ，則 $z_i = y_i$ 。其中，一連串的 $D-1$ binomial 試驗將決定該二進位序列： (b_1, b_2, b_3, b_4) 。為了獲得一新的向量 \mathbf{z} ，其中至少有一個元素不同於原向量 \mathbf{x} ，是故該二進位序列 (b_1, b_2, b_3, b_4) 必須為不均勻型態。在目前的族群中的每個解值向量 \mathbf{x}_i ，都將成為一次交配程序的目標向量，且配合一向量如： \mathbf{x}_c' ，以產生試驗向量 (trial vector) \mathbf{x}_t 。因此，試驗向量 \mathbf{x}_t 可稱為二個母向量的子向量：一雜訊隨機向量 (noisy random vector) 以及目標向量，且對於後者仍須相互競爭、適者生存。

為求得更優秀的子代，微分演化法將採取選擇 (selection) 運算程序。其中，並不使用族群選擇機制，而是比較每個試驗向量 \mathbf{x}_t 與其母系目標向量 \mathbf{x}_i 的價值；若目標向量 \mathbf{x}_i 的價值較試驗向量 \mathbf{x}_t 者為低，則目標向量 \mathbf{x}_i 將晉升至第二向量陣列中，反之，試驗向量 \mathbf{x}_t 將被複製至第二向量陣列，且其價值也將被儲存至

$\cos t[i]$ 中。

對於搜尋最佳 PID 時延控制器參數之微分演化法，吾人將其運算步驟條列整理如後：

微分演化演算法

- 0) 選擇族群大小 N_p ，權衡因子 w 以及最大疊代數目 N_I 。
- 1) 隨機產生一組 N_p 個向量；
 $\mathbf{x}_i \in [0,1]^4, i=0,1,\dots,N_p$ 並且計算其對應的 PID 時延控制器向量 \mathbf{p}_i 和 $\cos t[i] = J_0(\mathbf{p}_i)$ 或 $\cos t[i] = J_1(\mathbf{p}_i)$ 。
- 2) 設定疊代指數為 $I=1$ 。
- 3) 設定目標指數為 $m=1$ 。
- 4) 選出三個隨機數值； $r_l \in [0,1], l=1,2,3$ ，且令 $\alpha = \text{Int}\{r_1 N_p\}$ ， $\beta = \text{Int}\{r_2 N_p\}$ 以及 $\gamma = \text{Int}\{r_3 N_p\}$ ，其中 $\text{Int}\{\cdot\}$ 表示指示數值的整數部分。
- 5) 產生一雜訊隨機向量；
 $\mathbf{z} = \mathbf{x}_\alpha + w \cdot (\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\gamma)$ 。
- 6) 產生一非均勻 4 元素之二進位序列；
 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ 。
- 7) 以二進位序列 \mathbf{b} 為基礎，進行雜訊向量 \mathbf{z} 和目標向量 \mathbf{x}_m 的突變運算，以獲得試驗向量 \mathbf{x}_l 。
- 8) 計算試驗向量 \mathbf{x}_l 的價值並註記為 c_l 。若 $c_l > \cos t[m]$ 成立，則令 $\mathbf{x}_m^{\text{new}} = \mathbf{x}_m$ 且 $\cos t_m^{\text{new}}[m] = \cos t[m]$ ，否則 $\mathbf{x}_m^{\text{new}} = \mathbf{x}_l$ 並且 $\cos t_m^{\text{new}}[m] = c_l$ 。
- 9) 目標指數 m 增加 1。假如 $m < N_p$ 成立，則跳至步驟 4。
- 10) 對於 $m=0, \dots, N_p-1$ ，將 \mathbf{x}_m 取代為 $\mathbf{x}_m^{\text{new}}$ ，而 $\cos t[m]$ 取代為 $\cos t_m^{\text{new}}[m]$ 。
- 11) 找出擁有最小價值的點 \mathbf{x}_l ，也就是說，對於 $i=0, \dots, N_p-1$ 而言， $\cos t[l] \leq \cos t[i]$ 。
- 12) 疊代指數 I 增加 1。如果 $I < N_I$ 成立，則跳至步驟 3。
- 13) 最佳解將為 \mathbf{x}_m ，且其價值 $\cos t[m] \leq \cos t[i]$ ，對於 $i=0, \dots, N_p-1$ 而言。

5. 範例

為了說明所提出的分數階 PID 時延控制器之最適設計方法的可行性，我們將提供幾個設計範例作為參考，並藉由與傳統型 PID 時延控制器的性能比較，探討積分器採分數階後的實

際效果。另一方面，在隨後範例中，我們也會利用[15]所提出的數值演算方法，以 B-splines 函數數列模擬分數階 PID 時延控制回饋系統的時域應答。其演算細節請參考[15]，在此不多作敘述。

如前所提，分數階 PID 時延控制器的待變數為 $(k_c, \tau_i, \tau_d, \delta)$ ，而為了強調調整數階與分數階積分器效果的差異，我們會以最適傳統型 PID 時延控制器的參數組為設計基礎，然後再單獨搜尋出最佳的 δ 。當然，在待變參數減少時，前章節所提的微分演化法中的參數也可獲得減少。在範例中，我們也會實施這樣的設計。

5.1 一階不穩定且含時延程序 (First-order unstable process plus dead time)

首先，我們考慮一個不穩定程序 $G_p(s) = \frac{e^{-\theta_p s}}{s-1}$ ，並設計出相對的最適 ISE/ITSE 之 PID 時延控制器，其中 $\theta_p = 0.5$ 。於是，令控制器時延： $d = \theta_p = 0.5$ 。微分演化法搜尋的控制器參數組，如前所提，可依需求作調整。各種設計結果比較於表 1（對於 ISE）及 2（對於 ITSE），其中，加註下底線者，係未參與最適化搜尋。

表 1. 對於 $G_p(s) = e^{-0.5s}/(s-1)$ 比較不同最適 ISE； J_0 之 PID 時延控制器之參數與性能

PID 時延控制器型式	k_c^*	τ_i^*	τ_d^*	δ^*	J_0
傳統型	I. 1.268	0.236	1.381	<u>1</u>	0.757
分數階	II. <u>1.268</u>	<u>0.236</u>	<u>1.381</u>	1.058	0.752
	III. 1.354	0.187	1.400	1.185	0.741

表 2. 對於 $G_p(s) = e^{-0.5s}/(s-1)$ 比較不同最適 ITSE； J_1 之 PID 時延控制器之參數與性能

PID 時延控制器型式	k_c^*	τ_i^*	τ_d^*	δ^*	J_1
傳統型	I. 1.120	0.235	1.555	<u>1</u>	0.323
分數階	II. <u>1.120</u>	<u>0.235</u>	<u>1.555</u>	1.043	0.317
	III. 1.195	0.211	1.533	1.113	0.308

從表 1 及 2 的比較結果觀之，積分器階次 δ 由整數 1 (I.) 切換成分數階後 (II.)，回饋控制系統的性能確實有獲得提升。而當積分階次、控制器時間常數和增益值都能予以調節時，系統可達到更優越的控制效果 (III.)。

依照上述結果，圖 2 和 3 即為各個 PID 時延

控制器所對應的閉環路回饋控制系統之時域響應比較；其中，圖 2 係最適 ISE 設計之系統，而圖 3 係指最適 ITSE 者。就相同性能指數而言，雖然應答的上升時間 (Rise time) 和超越量 (Overshoot) 差異不大，但指數值越小者，穩定情況越趨迅速。再比較不同的性能指數的設計結果，可明顯看出採用 ITSE 者擁有更小的超越量及更短的穩定時間。

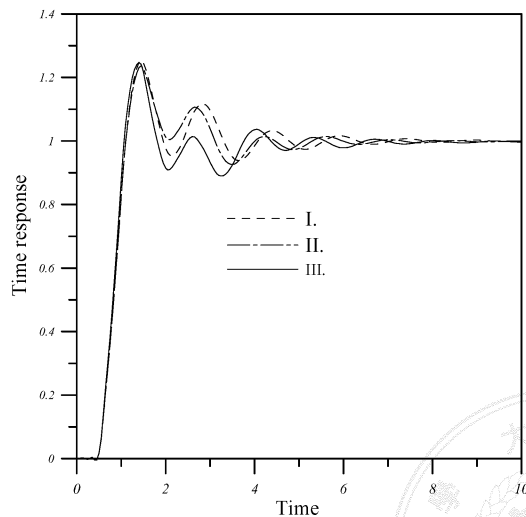


圖 2. 例 1 針對最適 ISE 設計之不同 PID 時延控制系統之時域響應比較；I.：傳統型、II.：分數階 (僅設計 δ)、III.：分數階 (全設計)

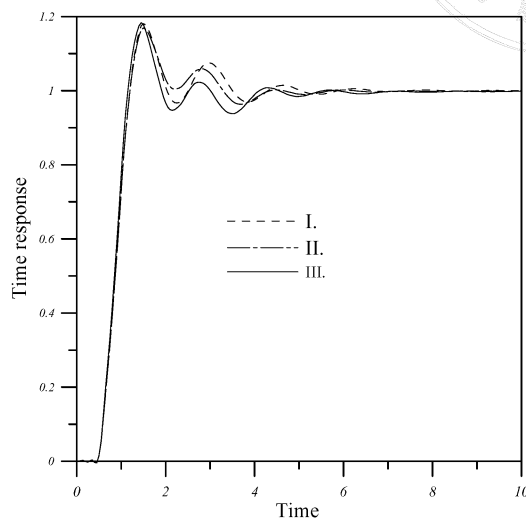


圖 3. 例 1 針對最適 ITSE 設計之不同 PID 時延控制系統之時域響應比較 I.：傳統型、II.：分數階 (僅設計 δ)、III.：分數階 (全設計)

5.2 積分程序 (Integral Process)

接著，考慮一個含長時延項的積分程序

$$G_p(s) = \frac{0.0506e^{-6s}}{s} [20].$$

令 PID 時延控制器之時延為 $d = 6.0$ ，再使用微分演化法依需求搜尋最適 ISE/ITSE 的控制參數組，結果如表 3 和 4 所列，同樣地，加註下底線者未參與最適化搜尋。為強調積分器階次 δ 對性能提升的貢獻情形，本例也以傳統型 PID 時延控制器最適參數為基礎 (I.)，再單獨搜尋 δ^* (II.)。全部控制器參數的最適化搜尋結果，也同樣在表中列出。

表 3. 對於 $G_p(s) = 0.0506e^{-6s}/s$ 比較不同最適

ISE ; J_0 之 PID 時延控制器之參數與性能						
PID 時延控制器 型式		k_c^*	τ_i^*	τ_d^*	δ^*	J_0
傳統型	I.	3.513	1.853	8.462	<u>1</u>	8.092
分數階	II.	<u>3.513</u>	<u>1.853</u>	<u>8.462</u>	1.027	8.083
	III.	3.522	1.871	8.556	1.027	8.080

表 4. 對於 $G_p(s) = 0.0506e^{-6s}/s$ 比較不同最適

ITSE ; J_1 之 PID 時延控制器之參數與性能						
PID 時延控制器 型式		k_c^*	τ_i^*	τ_d^*	δ^*	J_1
傳統型	I.	3.247	1.715	9.101	<u>1</u>	35.093
分數階	II.	<u>3.247</u>	<u>1.715</u>	<u>9.101</u>	1.032	34.965
	III.	3.260	1.755	9.200	1.032	34.887

本例之結果也與範例 5.1 相仿，證實積分器階次 δ 推展至分數階後，能改進回饋控制系統的性能表現，再配合其他控制器參數的同步搜尋，更能夠使之獲得提升。

6. 結論

由 Shinskey 的 PID 時延控制架構，本文進一步將其含時延項之積分器，衍展至分數階的範疇。此分數階 PID 時延控制器之參數： k_c 、 τ_i 、 τ_d 與 δ ，可藉由性能指數：ISE 或 ITSE 的最小化，決定其最適組合。其回饋控制系統的 ISE 或 ITSE，能採用[16]的數值方法，精確、有效率地計算得來。再配合微分演化法的搜尋，我們可以設計出最適 ISE/ITSE 的分數階 PID 時延控制器。而在設計範例中，也可看到系統性能，確實因此獲得改進。

參考文獻

- [1] F. G. Shinskey. PID-deadtime control of distributed processes. *Control Engineering Practice*, 9:1177-1183, 2002.
- [2] J. E. Normey-Rico and E. F. Camacho. A unified approach to design dead-time

- processes with dead-time. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 47(2):299-305, 2002.
- [3] H. J. Kwak, S. W. Sung and I. B. Lee. A modified Smith predictor with a new structure for unstable processes. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 38:405-411, 1999.
- [4] J. F. Leu, S. Y. Tsay and C. Hwang. Optimal tuning of PID-deadtime controllers for integral and unstable processes. *Proceedings of PSE Asia*: 49-54, Taipei, Taiwan, 2002.
- [5] A. L. Mehauté and G. Crepy. *Introduction to Transfer and Motion in Fractal Media: The Geometry of Kinetics*, ser. Solid State Ionics 9 & 10, Dordrecht, The Netherlands: North-Holland:17-30, 1983.
- [6] M. Nakagava and K. Sorimachi. Basic characteristics of a fractance device. *IEICE Trans., Fundamentals*, E75-A(12):1814-1818, 1992.
- [7] A. Outstloup. *La Derivation non Entiere: Theorie, Synthesis et Applications*. HERMES, Paris, 1995.
- [8] I. Petras and M. Hypiusova. Design of fractional-order controllers via H^∞ norm minimization. *Proceedings of the IFAC Conference on Control Systems Design*: 454-457, Bratislava, Slovak Republic, 2000.
- [9] J. A. Tenreiro Machado. Analysis and design of fractional-order digital control systems. *SAMS*, 27: 107-122.
- [10] P. Lanusse, A. Oustaloup and B. Mathieu. Third generation CRONE control. *Proceedings of International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 2: 149-155, 1993.
- [11] I. Petras. The fractional-order controllers: methods for their synthesis and application. *J. of Electrical Engineering*, 50(9-10): 284-288, 1999.
- [12] I. Petras and L. Dorcak. The frequency method for stability investigation of fraction control systems. *SACTA*, 2(1-2): 75-85, 1999.
- [13] I. Podlubny. Fractional-order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ -controllers. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 44(1): 208-214, 1999.
- [14] J. F. Leu, S. Y. Tsay and C. Hwang. Design of optimal fractional-order controllers. *J. Chin. Inst. Chem. Engr.*, 33(2): 1-10, 2002.
- [15] C. Hwang, J. F. Leu and S. Y. Tsay. A note on the design of fractional-order PID controllers in time domain. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 47(4): 625-631, 2002.
- [16] C. Hwang, Y. M. Chuang and Y. P. Shih. Numerical computation of quadratic cost functions for systems with multiple delays. *Control and Computers*, 22(3): 90-95, 1994.
- [17] A. M. Krall. *Stability Techniques for Continuous Linear Systems*, New York: Gordon and Breach, 1967.
- [18] K. Price and R. Stone. Differential evolution. *Dr. Dobb's Journal*, 22(April): 18-20, 24, 78, 1997.
- [19] S. L. Cheng and C. Hwang. Designing PID controllers with a minimum IAE criterion by a differential evolution algorithm. *Chem. Eng. Commun.* 170: 83-115, 1998.
- [20] A. Visioli. Optimal tuning of PID controllers for integral and unstable processes. *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, 148(2): 180-184, 2001.