FCU ePaper

逢甲大學學生報告 ePaper

以線插值法求圖形平滑的研究

作者：張榮芳

系級：土地管理學系碩專二

學號：M9810273

開課老師：周天穎教授、嚴泰來教授

課程名稱：空間資訊系統專論

開課系所：土地管理學系

開課學年：99 學年度 第一學期

逢甲大學
建設學院
College of Construction and Development

中文摘要

線插值是 GIS 的一個基本功能不僅僅用於圖形的平滑、整飾，而且應用於資料的補充。當我們在表現資料時，常常會有需要比實際量測點上的值更細密的情況，或者是有需要在範圍外預測其值,用線插值法來處理可以快速、正確的達捯要求。在研究方法中用一個實際的例子詳細介紹用線插值法求圖形平滑的實際步驟及計算公式，對於想要了解用線插值法求圖形平滑會有實際的幫助。

關鍵字：

線插值、多項式插值法

目　次

壹、前言　3

貳、參考文獻　3

叁、研究方法　5

肆、研究結果　8

壹、前言

線插值屬於一維插值，該項GIS的一個基本功能不僅僅用於圖形的平滑、整飾，而且應用於資料的補充，即對一維離散函數的資料補充。當我們在表現資料時，常常會有需要比實際量測點上的值更細密的情況，或者是有需要在範圍外預測其值。比方說天氣圖的繪製，不論是氣壓或是雨量，都不可能做到處處都有測量站，又例如我們關心一天之中溫度隨時間的變化，但是實際上記錄氣溫的動作可能只是每小時一次，則我們要作一個連續的圖時，就會用到插值法。

所謂線插值，可以作如下數學表述：

已知座標點P1（x1,y1）、P2（x2,y2）、P3（x3,y3）…………Pn（xn,yn），要求構建一個連續函數曲線解析運算式，

Y = f(x)

使此曲線通過或最接近座標點的各節點，這樣將離散點連成一條連續、平滑的曲線。對引數x作若干補充，代入函數中，即可計算出相應的Y，產生若干插入座標點，將原已知離散點和插入點順序連接起來，原座標曲線得到平滑。

線插值有三種演算法

（1）多項式法

（2）張力樣條法

（3）貝塞爾函數法

第（1）種方法保證平滑曲線經過每一已知離散點，此方法可用於資料補充。

第（2）、（3）種方法曲線除起、止兩點外，一般不經過離散點，只是最大接近。[1]

貳、參考文獻

多項式插值法

在數學兩個點可決定一條直線（不轉彎）、三個點決定一條二次曲線（會轉一次彎）、四個點決定一條三次曲線（會轉兩次彎，有反曲點）………等。這些曲線都是以多項式的形式（變數出現時，些是整數次方）。

一個 n – 1 次曲線的多項式雖有像 $y = a_{(n-1)}x^{(n-1)} + a_{(n-2)}x^{(n-2)} + ... + a_1x + a_0$ 這樣的通式可以表示出，但必須代入 n 個表列值才能定出 a_{n-1} 至 a_0 那 n 個係數，一下子不易看出。

[1] 資料來源：嚴泰來老師上課資料

數學上有一個 Lagrange 多項式公式，它可以由 n 對 (x,y) 值唯一決定 n-1 階多項式，且公式非常好記， 如下面公式

$$P(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_N)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)...(x_1-x_N)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_N)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)...(x_2-x_N)}y_2 + \cdots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{N-1})}{(x_N-x_1)(x_N-x_2)...(x_N-x_{N-1})}y_N$$

記法參考：寫下每一項都有係數 y_i，分母全是 $(x_i - x_j)$，其中 $i \neq j$，分子則全部都是 $(x - xj)$，一樣是 $i \neq j$ ，這樣的項共有 N 個相加。我們的式子最高項次一定是 x^{N-1}，符合 $(x - x_j)$ 連乘，並且當 x 恰為某一個 tabulated point x_i 時，y_i 會因分子分母一模一樣抵消成 1 而留下來，而其他具 y_j 的項則因其分子必定有 $(x - xi)$ 而成為零，因此 $y = y_i$，符合表列值的定義。

有了上面 Lagrange polynomial 的定義，拿來寫個程式，對任給的 x 求插值，也並非不可以，只是這樣就少了誤差分析及精密度控制的動作。

真正有用的演算法，是 Neville's 演算法。它定出 P_i 為原本表列值 y_i，而 $P_{i(i+1)}$ 則代表一般表列點是 x_i 與 x_{i+1} 所構成的一階 Lagrange 多項式。

$$\begin{array}{llllll}
x_1: & y_1 = P_1 & & & \\
 & & P_{12} & & \\
x_2: & y_2 = P_2 & & P_{123} & \\
 & & P_{23} & & P_{1234} \\
x_3: & y_3 = P_3 & & P_{234} & \\
 & & P_{34} & & \\
x_4: & y_4 = P_4 & & &
\end{array}$$

Neville's algorithm 厲害的地方，是發現由低階多項式，可以經由組合而系統化地得出更高階多項式（例如自 P_{12} 及 P_{23} 得出 P_{123})，根據下列關係式：

$$P_{i(i+1)\dots(i+m)} = \frac{(x - x_{i+m})P_{i(i+1)\dots(i+m-1)} + (x_i - x)P_{(i+1)(i+2)\dots(i+m)}}{x_i - x_{i+m}}$$

另外，不同級數間的大小差異，也方便地定義了 C 與 D 如何從 P 得到：

$$C_{m,i} \equiv P_{i\dots(i+m)} - P_{i\dots(i+m-1)}$$
$$D_{m,i} \equiv P_{i\dots(i+m)} - P_{(i+1)\dots(i+m)}.$$

進一步推導，C 與 D 更可以從前一級的 C 與 D 得到

$$D_{m+1,i} = \frac{(x_{i+m+1} - x)(C_{m,i+1} - D_{m,i})}{x_i - x_{i+m+1}}$$
$$C_{m+1,i} = \frac{(x_i - x)(C_{m,i+1} - D_{m,i})}{x_i - x_{i+m+1}}$$

如此，我們再回去看上面那個橫向金字塔，比方說想要得 x 的 P_{1234}，可由 低級數的 P 出發，透過 C 或 D 的求得並附加到 P 上，來獲得較高級數的 P（即在 橫向金字塔 中由左而右）越做越精密， 並且可一路上追蹤不同階數多項式之間的誤差度。[2]

叁、研究方法

將一條由四個點連接的曲線，利用『線插值』計算，在這四個點鐘分別插入 1~2 個點，點位置算出後繪製「插值前、後」之圖形。計算步驟如下：

（一）「線插值」公式：

1、B_1（U）、B_2（U）、B_3（U）、B_4（U）之計算方式分別如下：

B_1（U）＝U×（U-1）×（U-2）/（-1）×（-2）×（-3）

B_2（U）＝（U+1）×（U-1）×（U-2）/（1）×（-1）×（-2）

B_3（U）＝U×（U+1）×（U-2）/（-1）×（1）×（2）

B_4（U）＝（U+1）×U×（U-1）/（3）×（2）×（1）

2、X＝X_1B_1（U）＋X_2B_2（U）＋X_3B_3（U）＋X_4B_4（U）

Y＝Y_1B_1（U）＋Y_2B_2（U）＋Y_3B_3（U）＋Y_4B_4（U）

（二）「插值前」之四個點（X，Y）座標分別設定如下：

1. 第一點：（X，Y）＝（1,1）－此時 U 值＝（-1）
2. 第二點：（X，Y）＝（2,4）－此時 U 值＝0
3. 第三點：（X，Y）＝（4,3）－此時 U 值＝1
4. 第四點：（X，Y）＝（5,2）－此時 U 值＝2

（三）繪製「插值前」之圖形：

[2] 多項式插值法參考資料 http://boson4.phys.tku.edu.tw/numerical_methods/nm_units/interpolation_n_extrapolation_intro_n_polynomial.htm

（四）進行「線插值」計算：

1. 選取 5 個介於(-1)、0、1、2 之間的「插值點」，分別為 U＝(-2/3)、(-1/3)、1/2、2/3、3/2。

2. 將 U 值代入公式計算，分別得出以下之數值：

（1）U＝（-2/3）時：

B_1（U）＝40/81、B_2（U）＝20/27

B_3（U）＝（-8/27）、B_4（U）＝5/81

（2）U＝（-1/3）時：

B_1（U）＝14/81、B_2（U）＝28/27

B_3（U）＝（-7/27）、B_4（U）＝4/81

（3）U＝1/2 時：

B_1（U）＝（-1/16）、B_2（U）＝9/16

B_3（U）＝9/16、B_4（U）＝（-1/16）

（4）U＝2/3 時：

B_1（U）＝-4/81、B_2（U）＝10/27

B_3（U）＝20/27、B_4（U）＝-5/81

（5）U＝3/2 時：

B_1（U）＝1/16、B_2（U）＝-5/16

B_3（U）＝15/16、B_4（U）＝5/16

3. 再運用公式計算出 5 個「插值點」之（X，Y）座標，分別如下：

U＝（-1）時，（X，Y）＝（X_1，Y_1）＝（1,1）；

U＝0 時，（X，Y）＝（X_2，Y_2）＝（2,4）；
U＝1 時，（X，Y）＝（X_3，Y_3）＝（4,3）；
U＝2 時，（X，Y）＝（X_4，Y_4）＝（5,2）】

（1）第 1 個插值點之（X，Y）座標：

$X = X_1B_1(U) + X_2B_2(U) + X_3B_3(U) + X_4B_4(U)$

$= 1\times40/81 + 2\times20/27 + 4\times(-8/27) + 3\times5/81 \fallingdotseq 1.10$

$Y = Y_1B_1(U) + Y_2B_2(U) + Y_3B_3(U) + Y_4B_4(U)$

$= 1\times40/81 + 4\times20/27 + 3\times(-8/27) + 2\times5/81 \fallingdotseq 2.69$

（2）第 2 個插值點之（X，Y）座標：

X≒1.46
Y≒3.64

（3）第 3 個插值點之（X，Y）座標：

X≒3.0
Y≒3.75

（4）第 4 個插值點之（X，Y）座標：

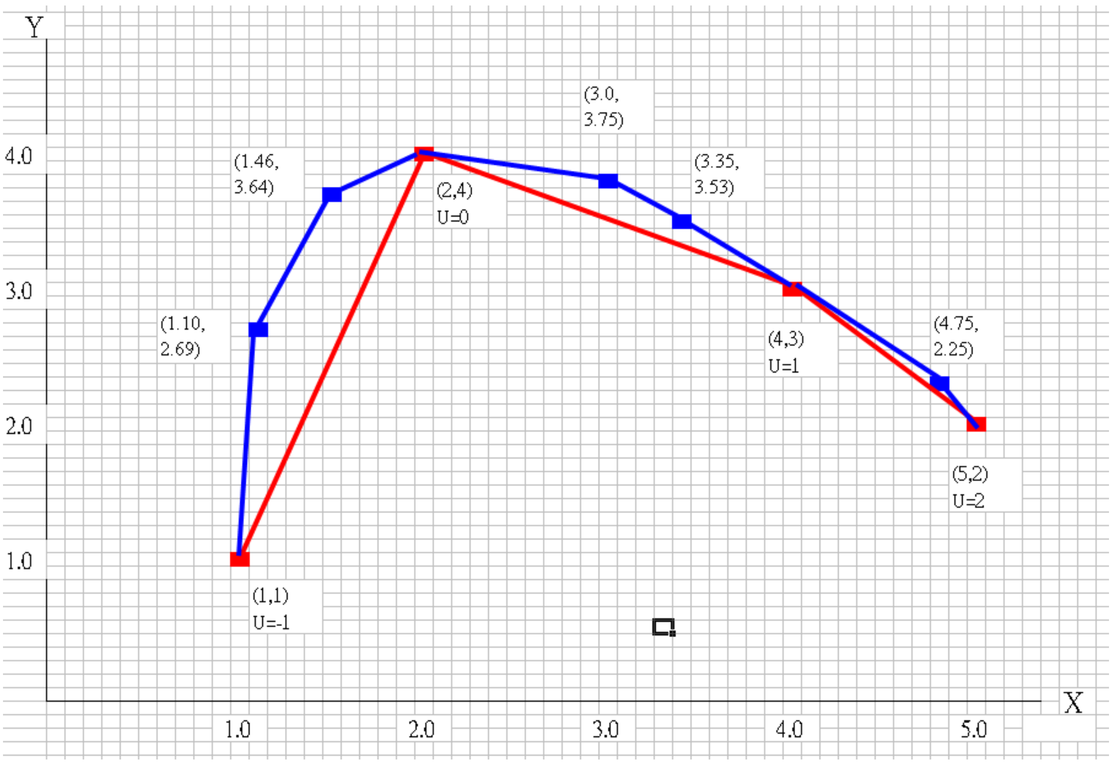
X≒3.35
Y≒3.53

（5）第 5 個插值點之（X，Y）座標：

X≒4.75
Y≒2.25

（五）繪製「插值後」之圖形：

1. 第一點：(X，Y) ＝ (1,1)
2. 第二點：(X，Y) ＝ (1.10,2.69)
3. 第三點：(X，Y) ＝ (1.46，3.64)
4. 第四點：(X，Y) ＝ (2，4)
5. 第五點：(X，Y) ＝ (3.0，3.75)
6. 第六點：(X，Y) ＝ (3.35，3.53)
7. 第七點：(X，Y) ＝ (4，3)
8. 第八點：(X，Y) ＝ (4.75，2.25)
9. 第九點：(X，Y) ＝ (5，2)



肆、研究結果

將 9 點繪製圖形如下，紅色線為插值前圖形，藍色線為插值後圖形，原先 4 個點得曲線角度較大，利用插值法計算出插補點，這樣將各點連成一條連續、平滑的曲線，可以看出插值後曲線變的平滑了。

參考文獻

[1] 嚴泰來老師上課資料

[2] 淡江大學李明憲老師課程及教學網站資料

http://boson4.phys.tku.edu.tw/numerical_methods/nm_units/interpolation_n_extrapolation_intro_n_polynomial.htm