報告題名：三角函數之應用

The Application of The Trig Functions

作者：李漢強.吳尚憲
系級：電機一甲
學號：D9467267

開課老師：陳德請

課程名稱：專題報告

開課系所：電機系

開課學年：　94　學年度 第 1 學期

摘要

三角函數（Trigonometric function）包括正弦函數、餘弦函數、正切函數、餘切函數、 正割函數、餘割函數.

三角知識起源很早，而最初是由歐拉在著名的<無窮小分析引論>一書中首次給出用三角形兩邊的比來定義.在歐拉之前有關三角函數的問題大都在一個確定半徑的圓內進行的.

在西元前 1900-1600 左右的一塊泥板上記錄了一個數表，其中有兩組數分別是邊長為整數的直角三角形斜邊邊長和一個直角邊邊長,由此推出另一個直角邊邊長.

而在巴比倫的幾何學與實際測量是有密切的聯系.他們已有相似三角形之對應邊成比例的觀念,也會計算簡單平面圖形的面積和簡單立體體積,然而我們現在把圓周分為 360 等分,據說也歸功於古代巴比倫人

另外在印度人方面,他們用半弦（即正弦）代替希臘人的全弦,製作正弦表,還證明了一些簡單的三角恆等式等等.

而在現在,三角函數的應用幾乎無所不在,諸如力學分析繪圖學圓錐曲線等等以及一些測量上也廣泛應用三角的性質,雖然三角函數的定義是相當簡單的, 但是卻也是相當的實用.

目次

(三角函數應用)

一.三角函數的起源:

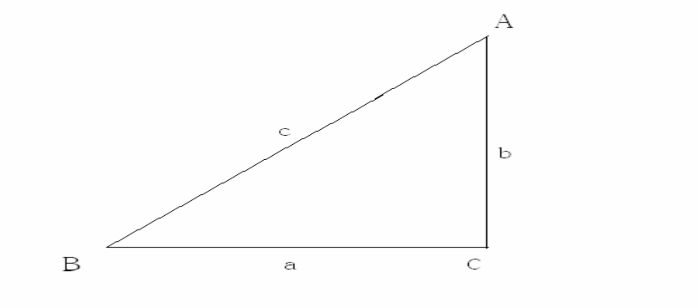
古埃及人已發展出三角學的概念(在萊因德紙草書記載著金字塔高度與橫寬的角度關係)，到了西元前 150 年至 100 年左右，希臘人開始研究三角學(希臘人尤其注重幾何學),而印度人又再加以改進希臘人的三角學。後來十六世紀的歐洲因應計算的需要，更加發展三角學。至今三角函數已被廣泛應用在各領域中(諸如天文學及繪圖學等等)。

而”三角學”這個字是由古代天文學家希巴爾卡斯所創(他亦將恆星亮度由 1~6 分出等級)

二.弧度制(徑度)

一般相信度的使用始於巴比倫人將一圓周等分為 360 等分,而另一度制定為在圓周上，與半徑等長之弧所對的圓心角稱為一弧度（或稱為一徑）而單位圓的周長為 2π,所以 $360^\circ = 2\pi$， $1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} \approx 0.0174533$ （弧度），然而由計算結果知 $\sin 1^\circ \approx 0.0174524$ 因此當期角度夠小時 $\sin x \approx x$ 又 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。

三.1.三角函數的定義及性質



$$\angle B\text{的正弦} = \sin B = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

$$\angle B\text{的餘弦} = \cos B = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$$

$$\angle B\text{的正切} = \tan B = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a}$$

$$\angle B\text{的餘切} = \cot B = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$$

$$\angle B\text{的正割} = \sec B = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{c}{a}$$

$$\angle B\text{的餘割} = \csc B = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{c}{b}$$

2.商數關係

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

3.特別角

	15°	30°	45°	60°	75°
sin	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
cos	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
tan	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
cot	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2-\sqrt{3}$
sec	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
csc	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

4.平方關係

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$$

$$1+\tan^2\theta=1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{b^2+a^2}{b^2}=\left(\frac{c}{b}\right)^2=\sec^2\theta$$

$$1+\cot^2\theta=1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=\left(\frac{c}{a}\right)^2=\csc^2\theta$$

5.餘角關係

若依三角形中$\angle A+\angle B=90^\circ$ 或$\angle A=90^\circ-\angle B$ ，則

$$\sin B=\frac{b}{c}=\frac{\angle B\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\frac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\cos A$$

同理可得

$\cos B=\sin A$ ， $\tan B=\cot A$

$\cot B=\tan A$ ， $\sec B=\csc A$

$\csc B=\sec A$

故可得：

$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$

$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$

$\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$

$\sec(90^\circ-\theta)=\csc\theta$

$\csc(90^\circ-\theta)=\sec\theta$

四.1.三角函數之廣義角的定義

（ 設座標平面上點 P 坐標(x,y)，並令 $\overline{OP}=r$ 。)

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}\ \cos\theta=\dfrac{x}{r}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}\ \cot\theta=\dfrac{x}{y}$

$\sec\theta=\dfrac{r}{x}\ \csc\theta=\dfrac{r}{y}$

2.正餘弦的疊合

$$\begin{aligned}\Rightarrow a\sin\theta+b\cos\theta&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\cos\theta\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\phi\times\sin\theta+\sin\phi\times\cos\theta)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\phi)\\&\left[\text{其中}\cos\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]\end{aligned}$$

五.和差積互化

積化和差..

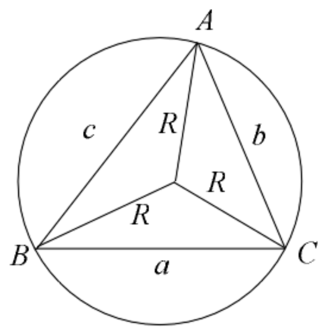
$$\begin{cases}2\sin\alpha\times\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\2\cos\alpha\times\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\\2\cos\alpha\times\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\-2\sin\alpha\times\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\end{cases}$$

和差化積..

$$\begin{cases} \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\times\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\times\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\times\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\times\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{cases}$$

六.1.正弦定理

若一三角形如右



則：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

2 餘弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\times\cos A\Rightarrow\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\times\cos B\Rightarrow\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\times\cos C\Rightarrow\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

3 正切定理

假設 ab 爲一三角形之兩邊而所對應的角分別爲 α β 則:

$(a+b)/(a-b)=(\sin\alpha+\sin\beta)/(\sin\alpha-\sin\beta)$ (由正弦定理可得)

$=<2\sin 1/2(\alpha+\beta)\cos 1/2(\alpha-\beta)>/<2\cos 1/2(\alpha+\beta)\sin 1/2(\alpha-\beta)>$

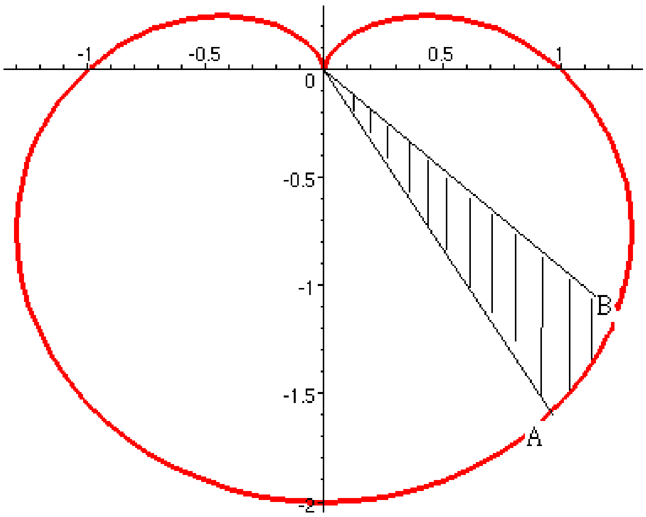
$=\tan 1/2(\alpha+\beta)\cot 1/2(\alpha-\beta)$

$=\tan 1/2(\alpha+\beta)/\tan 1/2(\alpha-\beta)$

此結果即當時維埃塔所提出的正切定理

七.1.三角函數的應用 (求曲線所爲之面積).

求心形曲線 $r=a(1-\sin\theta)$所圍之面積:



若取一極小角 $\Delta\theta$ 似扇形的圖形 OAB 則其面積近似於扇形面積

$=OA*OB*\Delta\theta/2$,而若取 $\Delta\theta$ 爲無限小,則:

lim($\Delta\theta$ 趨近 0)$OA*OB*\Delta\theta/2=r^2\Delta\theta/2$

因爲若分割出無限多扇形,則曲線所圍之面積=所有小扇形之和,

即: 曲線下面積:

(從 0 積至 2pi) $A=\int r^2/2d\theta$

$=\int a^2(1-\sin\theta)^2/2d\theta$

$=a^2/2\int(1-\sin\theta)^2d\theta$

$=a^2/2\int(1-2\sin\theta+\sin^2\theta)d\theta$

$=a^2/2\int(1+\sin^2\theta)d\theta$

$=a^2/2\int d\theta+a^2/2\int(1-\cos2\theta)/2d\theta$

$=a^2\theta/2+a^2/4(\theta-\sin2\theta/2)$

$=3a^2\theta/4+a^2\sin2\theta/8$

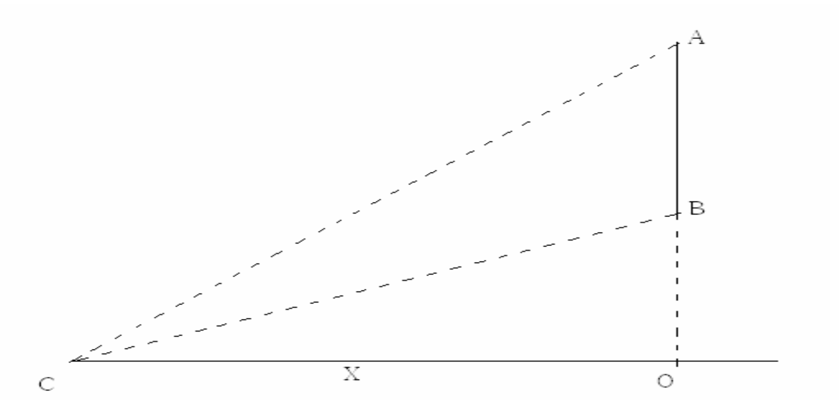
$=3\pi a^2/2$

(此方法亦可求其他類似曲線如螺旋線)

2 三角函數的應用 (三角極值問題)- (出自 毛起來說三角)

一鉛直懸掛棒子 AB 如圖 OA=a,OB=b 而依觀察者於 C

求 OC= x 爲何時視角 ACB 爲最大?



(令角 ACB=θ 角 BCO=β 角 ACO=α)

$\cot\theta = \cot(\alpha - \beta) = 1 + \cot\alpha\cot\beta / \cot\beta - \cot\alpha$

$= (x^2+ab)/(a-b)x$

對 X 微分:$d\cot\theta/dx = (x^2-ab)/(a-b)x^2$

令 $x^2-ab/(a-b)x^2=0$

可得 $x=\sqrt{(ab)}$

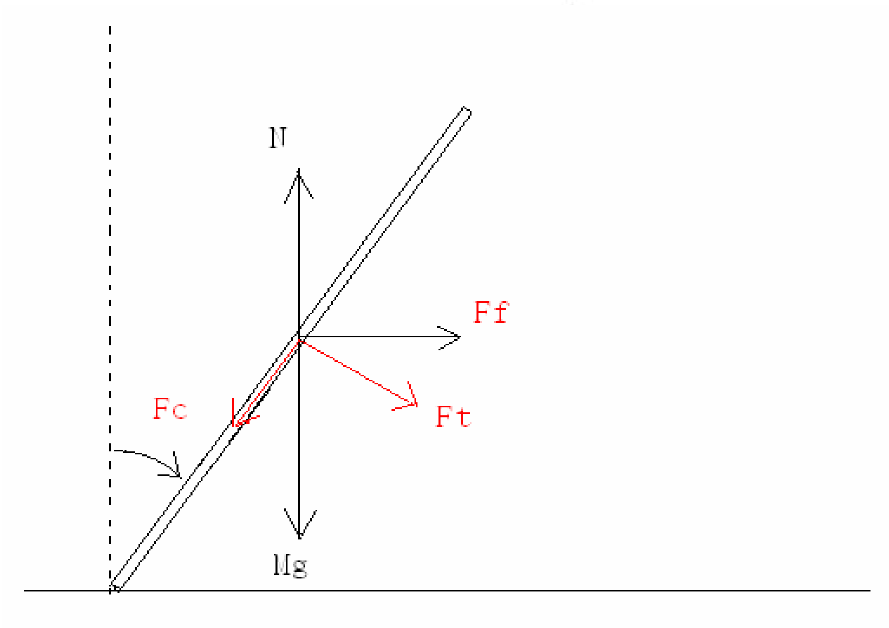
然而亦可由算幾不等式球出相同結果

(當時提出此問題時還未發明出微積分)

3.三角函數的應用

假設一木棒長 l 質量 M 垂直於地面然後倒下,經 t 時刻時其鉛直線與木棒夾角 θ,角速度 ω.角加速度 α.地面對其作用之摩差力 Ff 及**正向力** N.則:

ω.α.Ff .N.t 與 θ 的關西:



因為木棒各質點位能變化之和=各質點的動能和

$$>>\sum mg(r-r\cos\theta)=\sum mv^2/2$$

$$>>\int mgr(1-\cos\theta)dr=\int mr^2\omega^2/2dr$$

$$>>(1-\cos\theta)mg\int rdr=m\omega^2/2\int r^2dr$$

$>>(1-\cos\theta)r^{2}mg/2=mr^{3}\omega^{2}/3$

代入上限 h 下限 0 帶入整理可得:

$\omega=(3g(1-\cos\theta)/h)^{1/2}$

設當經 t 時刻時其質心水平位移與鉛直位移 X.Y.又質心速度 v=rω

$>>h\sin\theta/2=$(0 積至 t)$\int(3g(1-\cos\theta)/h)$　/　$\cos\theta\, h/2dt$..(1)

$h(1-\cos\theta)=$(0 積至 t)$\int(3g(1-\cos\theta)/h)$　/　$\sin\theta\, h/2dt$..(2)

$>>d\theta/dt=(3g(1-\cos\theta)/h)^{1/2}$

$>>dt/d\theta=(h/3g)^{1/2}/(1-\cos\theta)^{1/2}$

$>>t=\int(h/3g)^{1/2}/(1-\cos\theta)^{1/2}d\theta$

$=(h/3g)^{1/2}\int 1/(2\sin^{2}(\theta/2))^{1/2}d\theta$

$=(2h/3g)^{1/2}\int\csc(\theta/2)d\theta/2$

$=(2h/3g)^{1/2}\int\csc(\theta/2)(\cot(\theta/2)+\csc(\theta/2))/(\cot(\theta/2)+\csc(\theta/2))$

$=-(2h/3g)^{1/2}\int 1/(\cot(\theta/2)+\csc(\theta/2))d(\cot(\theta/2)+\csc(\theta/2))$

$=-(2h/3g)^{1/2}\ln|\cot(\theta/2)+\csc(\theta/2)|$

（三角函數之應用）

$>>t=(2h/3g)^{1/2}\ln(\sin(\theta/2)/(1+\cos(\theta/2)))(0\leq\theta/2\leq pi/2)$

又力矩 tau=Iα

$>>$ rxF=Mh$^2\alpha$/3

$>>$ hMgsinθ/2=Mh$^2\alpha$/3

$>>$ α=3gsinθ/(2h)

(或由角速度 ω 對時間 t 爲分一可得同樣的結果)

而 Ff+Mg+N 應等於將其分爲 Fc+Ft 之分向量:

$>>$Ftcosθ-Fcsinθ=Ff...(1)

Ftsinθ+Fccosθ=Mg-N...(2)

$>>$Ft=Mhα/2=3Mghsinθ/(4h)=3Mgsinθ/4

Fc=Mω^2h/2=3Mgh(1-cosθ)/(2h)=3Mg(1-cosθ)/2

代入(1)(2)式整理可得:

$>>$Ff=3Mg(3sin(2θ)/4-sinθ)/2

Mg-N=3Mg(sin$^2\theta$/2+cosθ-cos$^2\theta$)/2

4.三角測距：

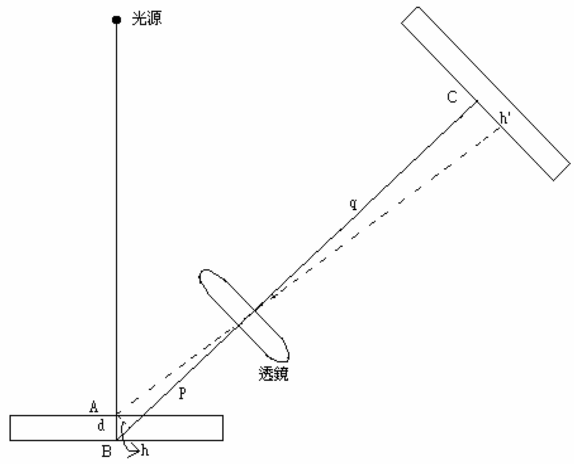
如圖 BO=P，OC=G，角 APB=θ，角 ABP=φ，

測量 AB 兩點的微小距離：

由 $\tan\theta = (h'/q)=(d\sin\varphi/p-d\cos\varphi)$

$\rightarrow h'p=d(h'\cos\varphi+q\sin\varphi)$

$\rightarrow d=(h'p)/(h'\cos\varphi+q\sin\varphi)$



而若 h' 還小於 q 且 d 遠小於 L 則上

式 $h'\cos\varphi$ 可忽略：

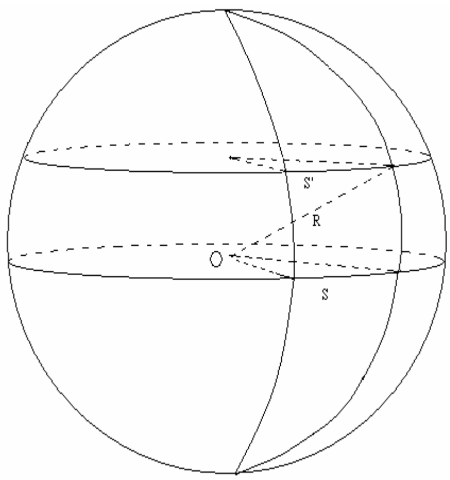
$d=(h'p)/(q\sin\varphi)$

5.球面上弧長化爲平面上直線:

地球上經度差 θ 赤道弧長 s 北緯 φ 處弧長

s’則若將球面圖轉成平面圖而不改變方向

則平面上 s=s’



$s=R\theta$

$s'=r\theta$

又因 $r=R\cos\varphi$ 所以 $s'=R\cos\varphi.\ \theta=s\cos\varphi$

而 s’在平面上化爲與 s 相等的距離時距離誤差爲:

$(s-s')/s'=(s-s\cos\varphi)/s\cos\varphi$

$=(1-\cos\varphi)/\cos\varphi=1/\cos\varphi-1$

.參考書目: 參考書目..毛起來說三角 / 毛爾著 天下.文化出版

誌謝

感謝尚憲的意見提供及校正. 以及朋友提供的想法. 在此特別致謝